# ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Bohuslav Sivák, Katedra algebry a teórie čísiel PFUK, Mlynská dolina, 816 31 Bratislava. Nové úlohy s riešeniami posielajte na jeho adresu

Úloha A (Podľa jednej z úloh XXIX. Moskovskej MO spracoval B. Sivák). Je daných 15 predmetov, z ktorých dva sú rádioaktívne. K dispozícii je Geiger-Müllerov počítač rádioaktívnych častíc. Je dovolené robiť merania nasledujúceho typu: niektoré z daných predmetov sa dajú dohromady a počítačom zistíme, či je medzi nimi rádioaktívny predmet; nezistíme však, či ide o jeden alebo dva rádioaktívne predmety. Pomocou 7 meraní treba nájsť obidva rádioaktívne predmety.

*Riešenie.* Pri riešení sa nám vyskytne niekoľko problémov podobného druhu, preto bude výhodné zaviesť nasledujúce označenie:

$R_2(n, k)$... problém: dva spomedzi $n$ predmetov sú rádioaktívne, treba ho nájsť pomocou $k$ meraní

$R_1(n, k)$... problém: jeden spomedzi $n$ predmetov je rádioaktívny, treba nájsť pomocou $k$ meraní

$R_2(n_1, n_2, k)$ ... problém: sú dané dve disjunktné skupiny $n_1$ a $n_2$ predmetov, v každej z nich je jeden rádioaktívny, treba ich nájsť pomocou $k$ meraní

$R_2(n_1, (n_2), k)$ ... problém: sú dané dve disjunktné skupiny $n_1$ a $n_2$ predmetov, dva spomedzi týchto $n_1 + n_2$ predmetov sú rádioaktívne, z toho aspoň jeden z prvej skupiny. Treba ich nájsť pomocou $k$ meraní.

Našou úlohou je riešiť problém $R_2$ (15, 7). Najprv si všimnime, že problém $R_1(n, k)$ je riešiteľný práve vtedy, ak $n \leqq 2^k$ (prečo?). Teda všetky problémy typu $R_2(2^m, 2^n, m+n)$ sú riešiteľné. Ďalej, problémy $R_2(1, n, k)$ a $R_2(1, (n), k)$ sú ekvivalentné s $R_1(n, k)$ a problém $R_2(n, (1), k)$ s $R_2(n+1, k)$. Problém $R_2(n+1, n)$ je riešiteľný pre všetky $n$ (stačí zmerať $n$ rôznych jednoprvkových skupín).

Dokážeme postupne nasledujúce tvrdenia:

1. $R_2(2, (2^k - 1), k+1)$ je riešiteľný pre všetky $k$
2. $R_2(7,5)$ je riešiteľný
3. $R_2(3, (4), 4)$ je riešiteľný
4. $R_2(3, (7), 5)$ je riešiteľný
5. $R_2(10, 6)$ je riešiteľný
6. $R_2$ (3, 5, 4) je riešiteľný
7. $R_2(5, (10), 6)$ je riešiteľný.

*Dôkaz 1.* V prvom meraní stačí otestovať jeden zo skupiny dvoch predmetov; dostaneme $R_1(2^k, k)$ alebo $R_1(2^k - 1, k)$.

*Dôkaz 2.* V prvom meraní otestujeme skupinu dvoch predmetov. V negatívnom prípade máme $R_2(5, 4)$, čo je triviálne, v pozitívnom prípade $R_2(2, (5), 4)$, čo je zjednodušená verzia problému $R_2(2, (7), 4)$ a stačí použiť 1 pre $k = 3$.

*Dôkaz 3.* Predmety prvej skupiny označme $a, b, c$, predmety druhej skupiny $d, e, f, g$, v prvom meraní otestujeme $a, d$. V negatívnom prípade dostaneme $R_2(2, (3), 3)$ (pozri 1 pre $k = 2$), v pozitívnom prípade zostáva osem možných dvojíc:

$$ab, ac, ad, ae, af, ag, bd, cd$$

V druhom meraní otestujeme $b, c$. Z negatívneho výsledku vyplýva $R_1(4, 2)$, z pozitívneho $R_2(2, 2, 2)$.

*Dôkaz 4.* V prvom meraní otestujeme 4 zo skupiny 7 predmetov. Z negatívneho výsledku dostaneme $R_2(3, (3), 4)$ (pozri 3), z pozitívneho $R_2$ (3, 4, 4).

*Dôkaz 5.* V prvom meraní otestujeme tri predmety, dostaneme $R_2(7, 5)$ alebo $R_2(3, (7) 5)$ (pozri 2, 4).

*Dôkaz 6.* Predmety prvej skupiny označme $a, b, c$, predmety druhej skupiny $d, e, f, g, h$. V prvom meraní otestujeme $a, d$. Z negatívneho výsledku bude $R_2(2,4,3)$, z pozitívneho vyplýva, že zostáva týchto 7 možných dvojíc:

$$ad, ae, af, ag, ah, bd, cd$$

V druhom meraní otestujeme $d$, dostaneme $R_1(3, 2)$ alebo $R_1$ (4, 2).

*Dôkaz 7.* V prvom meraní otestujeme šesť predmetov z druhej skupiny. Z pozitívneho výsledku vyplýva $R_2(5, 6, 5)$, čo sa otestovaním troch predmetov z druhej skupiny prevedie na problém $R_2(3, 5, 4)$. Z negatívneho výsledku prvého merania vyplýva $R_2(5,(4), 5)$. V druhom meraní otestujeme dva predmety z prvej skupiny, dostaneme $R_2(3, (4), 4)$ alebo $R_2(2, (7), 4)$.

Riešiteľnosť problému $R_2$ (15, 7) je teraz už zrejmá: v prvom meraní sa otestuje päť predmetov, čo dáva $R_2(10, 6)$ alebo $R_2(5, (10), 6)$.

Poznamenajme, že k ľubovoľnému $k \geqq 2$ existuje najväčšie prirodzené číslo $n$ také, že $R_2(n, k)$ je riešiteľný. Pre $k \leqq 12$ je situácia takáto:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k = 2$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $N = 3$ | 4 | 5 | 7 | 10 | 15 | 22 | 31 | 44 | 63 | 89 |

Dôkaz neriešiteľnosti zodpovedajúcich $R_2(n + 1, k)$ sa robí indukciou cez $k$, ale dôkazy riešiteľnosti $R_2(n, k)$ sú pre $k \geqq 8$ komplikované.

Z uvedených skutočností možno vytušiť, že tvrdenia 1 až 7 nemožno zosilniť. Je to pravda s výnimkou 4 — to sa dá zosilniť na $R_2(3, (9), 5)$. Doteraz sme neuskutočnili žiadny dôkaz neriešiteľnosti problému do úvahy vzatého typu. Tu sú dva príklady.

Problém $R_2$ (5, 3) je neriešiteľný, lebo dva predmety spomedzi 5 možno vybrať práve 10 spôsobmi, kým tri merania dajú nanajvýš 8 rôznych výsledkov. Všeobecne, ak je problém $R_2(n, k)$ riešiteľný, nutne $\binom{n}{2} \leqq 2^k$. Tento odhad je však pri väčšom počte meraní príliš hrubý.

V prípade problému $R_2(6, 4)$ máme: $\binom{6}{2} = 15 \leqq 16 = 2^4$, ale problém je neriešiteľný. Ak ale v prvom meraní otestujeme $x$ predmetov, dostaneme $R_2(6-x, 3)$ alebo $R_2(x, (6-x), 3)$. Z riešiteľnosti prvého vyplýva $6-x \leqq 4$, t.j. $x \geqq 2$, z riešiteľnosti druhého vyplýva $\binom{x}{2} + x(6-x) \leqq 2^3$, čo sa upraví na $x^2 - 11x + 16 \geqq 0$, ale túto podmienku nemožno splniť pre $2 \leqq x \leqq 6$.

Ak pre $k \geqq 2$ označíme $r(k)$ najväčšie prirodzené číslo $n$, pre ktoré je problém $R_2(n, k)$ riešiteľný, dostaneme rekurentný odhad

$$\binom{r(k+1)}{2} \leqq \binom{r(k)}{2} + 2^k$$