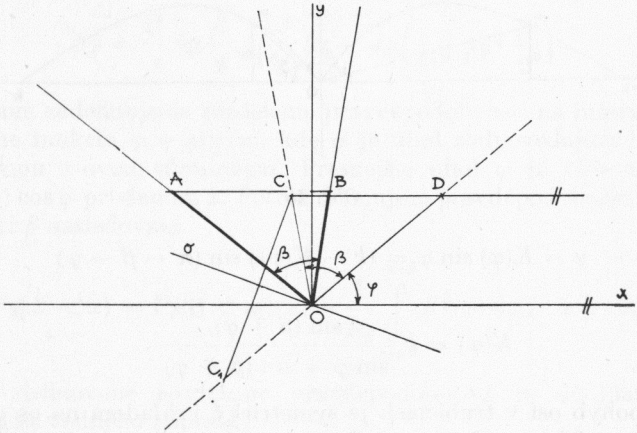
POZNÁMKA K JEDNÉMU ROZDELENIU PRAVDEPODOBNOSTI

OTAKAR GROŠEK, Bratislava

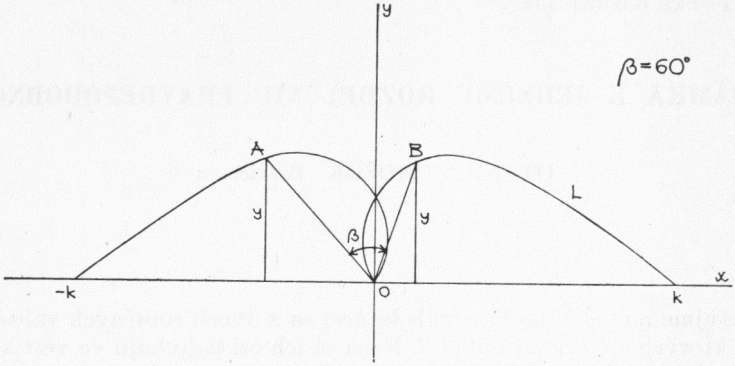
Uvažujme model U trubice, skladajúcej sa z dvoch rotačných valcových plôch, ktorých osi zvierajú uhol β. Nech sa ich osi pohybujú vo vertikálnej rovine na horizontálnej podložke. Priesečníky hladiny kvapaliny s osami sú body A, B a priesečník osí je bod 0. Pri pohybe body A, B opisujú krivku L, skladajúcu sa z dvoch symetrických vetiev. Pre zaujímavosť uveďme konštrukciu dvoch „nových" bodov C, D, ak uhol jedného ramena s kladným smerom osi x je φ a celková dĺžka vodného stĺpca v oboch ramenách je k (*obr. 1*).



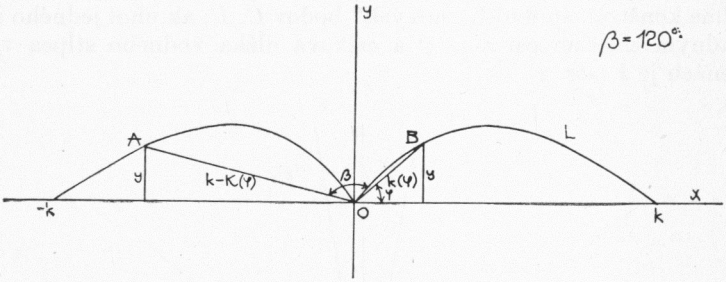
Obr. 1

Ak predĺžime rameno DO o dĺžku CO do bodu C_1 ($DC_1 = k$), bude trojuholník DCC_1 určený podľa vety „usu". Bod 0 leží na osi strany CC_1.

Vypočítajme rovnicu krivky L v polárnych súradniciach (*obr. 2a, 2b*). Ak označíme dĺžku stĺpca kvapaliny v pravom ramene trubice $K(\varphi)$, tak platí:



Obr. **2***a*



Obr. **2***b*

$$y = K(\varphi) \sin \varphi = (k - K(\varphi)) \sin (\pi - \beta - \varphi)$$

z čoho

$$K(\varphi) = k \frac{\sin (\beta + \varphi)}{\sin \varphi + \sin (\beta + \varphi)}.$$

Keďže pohyb osí v trubiciach je symetrický vzhľadom na os y, je naša krivka symetrická podľa osi y. Poznamenajme ešte, že daná krivka je v kartézskych súradniciach šiesteho stupňa a uhol φ je z intervalu $\langle 0, \pi - \beta \rangle$. Ak je uhol β ostrý, krivka L má tvar ako na *obr. 2a*, ak je tupý, ako na *obr. 2b*. V ďalšom budeme uvažovať len $\beta \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi)$.

Vyrátajme plochu, ohraničenú jednou vetvou krivky L, t. j. uhol $\varphi \in \in \langle 0, \pi - \beta \rangle$. Podľa vzorca pre plochu (pozri [1], str. 428 — 429) platí (S_β je plocha ohraničená oboma vetvami):

$$\frac{1}{2} S_\beta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi-\beta} K^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{k^2}{2} \int_0^{\pi-\beta} \left[\frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin\varphi + \sin(\beta+\varphi)} \right]^2 d\varphi =$$

$$= \frac{k^2}{2} \int_0^{\pi-\beta} \left[\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} + \varphi + \frac{\beta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\beta}{2} + \varphi\right) \cos\frac{\beta}{2}} \right]^2 d\varphi = \frac{k^2}{8} \int_0^{\pi-\beta} \left[1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{cotg} \right.$$

$$\left. \left(\frac{\beta}{2} + \varphi\right) \right]^2 d\varphi = \frac{k^2}{8} [\varphi]_0^{\pi-\beta} + \frac{k^2}{H} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \left[\ln \left| \sin\left(\frac{\beta}{2} + \varphi\right) \right| \right]_0^{\pi-\beta} +$$

$$+ \frac{k^2}{8} \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} \left[-\operatorname{cotg}\left(\frac{\beta}{2} + \varphi\right) - \left(\frac{\beta}{2} + \varphi\right) \right]_0^{\pi-\beta} =$$

$$= \frac{k^2}{4} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \frac{k^2}{8} (\pi - \beta) \left((1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \right)$$

z čoho vyplýva, že plocha ohraničená oboma vetvami je

$$S_\beta = \frac{k^2}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \frac{k^2}{4} (\pi - \beta) \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \right).$$

V ďalšom zadefinujeme rozdelenie pravdepodobnosti na intervale $\langle 0, k \rangle$. Definujme funkciu $\varphi = \arg(x)$, kde φ je uhol zodpovedajúci bodu grafu s príslušnou x-ovou súradnicou. Presnejšie uhol φ je riešením rovnice $x = K(\varphi) \cos\varphi$ pri danom x. Potom definujme pravdepodobnosť pri danom parametri β nasledovne:

$$P_\beta(X < x) = P_\beta(\emptyset < \arg x) = \frac{1}{S_\beta} \int_{\arg x}^{\pi-\beta} K^2(\varphi)\, d\varphi, \quad x \in \langle 0, k \rangle$$

Takto definované rozdelenie pravdepodobnosti je dvojparametrické (β a veľkosť vodného stĺpca k).

Na záver uvedieme metódu, ako túto pravdepodobnosť vyčísliť. Na to musíme vyriešiť rovnicu $x = K(\varphi) \cos\varphi$ pri danom x, aby sme dostali hodnotu $\arg(x)$. Tu sa nám ponúka niekoľko možností: možno napríklad rozvinúť pravú stranu rovnice do radu, a potom ho invertovať, vyčísliť pravú stranu rovnice s nejakým krokom h, a potom použiť niektorú z interpolačných formúl, a tu potom invertovať, alebo vyčísliť pravú stranu rovnice v niektorých „známych" bodoch a použiť príslušný Lagrangeov

polynóm a invertovať ho. Posledná z uvedených metód sa nám zdá najpohodlnejšia.

Keď uvážime príslušné hodnoty v *tabuľke* ($\varphi \in \langle 0, \pi - \beta \rangle$, $k = 1$), dostávame (pozri [2], str. 84 — 85):

φ	$k(\varphi)$	$\cos \varphi$	$k(\varphi) \,.\, \cos \varphi$
0	1	1	1
$\frac{\pi - \beta}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sin \frac{\beta}{2}$	$\frac{1}{2} \sin \frac{\beta}{2}$
$\pi - \beta$	0	$-\cos \beta$	0

$$x = L_2(\varphi) = \frac{\left(\varphi - \frac{\pi - \beta}{2}\right)(\varphi - \pi + \beta)}{\left(0 - \frac{\pi - \beta}{2}\right)(0 - \pi + \beta)} \,.\, 1 +$$

$$+ \frac{(\varphi - 0)(\varphi - \pi + \beta)}{\left(\frac{\pi - \beta}{2} - 0\right)\left(\frac{\pi - \beta}{2} - \pi + \beta\right)} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\beta}{2} + 0 =$$

$$= 2(\pi - \beta)^{-2} (\varphi - \pi + \beta) \left[\varphi \left(1 - \frac{1}{2} \sin \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\pi - \beta}{2} \right]$$

z čoho

$$\varphi^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin \frac{\beta}{2}\right) - \varphi \frac{(\pi - \beta)}{2} \left(3 - \sin \frac{\beta}{2}\right) +$$

$$+ \frac{(\pi - \beta)^2}{2} - x \frac{(\pi - \beta)^2}{2} = 0$$

odkiaľ už φ možno vypočítať.

Literatúra

[1] Kudrjavcov, L. D.: Matematičeskij analiz I. Moskva, Izd. Vysšaja škola 1970.

[2] Filčakov, P. F.: Čislennyje i grafičeskije metody prikladnoj matematiky, Kyjev, Izd. Naukova dumka 1970.