ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Vojtech Filo, Piešťany, Lúčna 14. Nové úlohy (s riešeniami) posielajte na jeho adresu.

Úloha A 10 (autor P. Bartoš).

Nech a, b, c sú strany a $2s$ obvod trojuholníka. Vtedy

$$8(s-a)(s-b)(s-c) \leqq abc \leqq \frac{1}{9}(a+b+c)(ac+bc+ab) \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{8}(a+b)(b+c)(c+a) \tag{1}$$

pričom rovnosť platí len v rovnostrannom trojuholníku, a to súčasne vo všetkých nerovnostiach.

Dôkaz: Nerovnosti (1) píšme skrátene vo forme $A \leqq B \leqq C \leqq D$. Najprv dokážeme, že $A \leqq B$.

Keďže $s - a = \dfrac{-a+b+c}{2} > 0$ a podobne $s - b > 0$, $s - c > 0$, platí podľa vety 1 (vety sú uvedené na konci článku)

$a = (s-b) + (s-c) \geqq 2\sqrt{(s-b)(s-c)}$ (rovnosť len keď $s - b = s - c$, teda $b = c$)

$b = (s-c) + (s-a) \geqq 2\sqrt{(s-c)(s-a)}$ (rovnosť len keď $a = c$)

$c = (s-a) + (s-b) \geqq 2\sqrt{(s-a)(s-b)}$ (rovnosť len keď $a = b$).

Podľa vety 2 potom $8(s-a)(s-b)(s-c) \leqq abc$, teda $A \leqq B$ a rovnosť len vtedy, keď $a = b = c$.

Teraz dokážeme nerovnosť $B \leqq D$. Podľa vety 1 $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$ (rovnosť pri $a = b$), $b + c \geqq 2\sqrt{bc}$ (rovnosť pri $b = c$), $c + a \geqq 2\sqrt{ac}$ (rovnosť pri $a = c$), a teda podľa vety 2

$$abc \leqq \frac{1}{8}(a+b)(b+c)(c+a) \tag{2}$$

teda $B \leqq D$ pri tej istej podmienke rovnosti ako pri $A \leqq B$.

Nerovnosť $B \leqq C$ je jednoduchým dôsledkom nerovnosti

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 9.$$

Tu sa kvôli dôkazu nerovnosti $C \leqq D$ hodí tento dôkaz.

Keďže $2s - a = b + c$, $2s - c = a + b$, $2s - b = a + c$ je

$$\frac{1}{8}(a + b)(b + c)(c + a) = \frac{1}{8}(2s - a)(2s - b)(2s - c) =$$

$$= \frac{1}{8}[8s^3 - 4s^2(a + b + c) + 2s(ab + ac + bc) - abc] =$$

$$= \frac{1}{8}[2s(ab + ac + bc) - abc]$$

a teda podľa (2)

$$\frac{1}{8}[2s(ab + ac + bc) - abc] \geqq abc \tag{3}$$

Pri tej istej podmienke rovnosti ako v prvej nerovnosti. Z nerovnosti (3) vyplýva

$$2s(ab + ac + bc) \geqq 9abc \tag{4}$$

čiže $B \leqq C$ a rovnosť len pri $a = b = c$.

Ešte treba dokázať nerovnosť $C \leqq D$. Už sme ukázali, že

$$\frac{1}{8}(a + b)(b + c)(c + a) = \frac{1}{8}[2s(ab + ac + bc) - abc] \tag{5}$$

Pretože podľa (4) $-abc \geqq \frac{-1}{9}(a + b + c)(ab + ac + bc)$ (rovnosť pri $a = b = c$), vyplýva z (5)

$$\frac{1}{8}(a + b)(b + c)(c + a) = \frac{1}{8}[2s(ab + ac + bc) - \frac{1}{9}2s(ab + ac + bc) =$$

$$= \frac{1}{9}(a + b + c)(ab + ac + bc)$$

teda $C \leqq D$ (rovnosť pri $a = b = c$).

Keďže sme dokázali nerovnosti $A \leqq B$, $B \leqq C$, $C \leqq D$, je tým dokázaný vzťah (1), v ktorom rovnosť platí len keď $a = b = c$, a to súčasne vo všetkých znakoch nerovnosti.

Poznámka 10.1 Tu možno pouvažovať o tom, ktoré z nerovností platia pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c a nielen pre čísla splňujúce trojuholníkovú nerovnosť. Tiež možno vyšetrovať, či a v akej forme platia pre ľubovoľné nezáporné čísla a, b, c.

Poznámka 10.2. Zovšeobecniť nerovnosti (aspoň niektoré) pre n-uholníky, resp. pre n kladných, či nezáporných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geqq 3$. Tu možno nájsť niekoľko spôsobov. Napr. ak $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú strany n-uholníka, pričom poradie indexov nemusí vyznačovať ich sled po obvode, potom platí

$$(s - a_1)(s - a_2) \ldots (s - a_n) \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{2^n}(a_2 + a_3 + \ldots + a_n)(a_1 + a_3 + \ldots + a_n) \ldots (a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1})$$

(podmienka rovnosti $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$).

Tu možno hľadať riešenie problému porovnania pravých strán nerovnosti medzi sebou, ak zmeníme poradie čísel a_i, napr. $a_1, a_3, a_4, \ldots, a_{n-2}, a_2, a_n$ a pod. Tento problém bude predbežne nad sily žiakov.

Uvádzame citované vety, ktoré boli dokázané v druhom zväzku Matematických obzorov na strane 52.

Veta 1: Pre nezáporné čísla a, b platí $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$.

(Rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = b$).

Veta 2: Ak a, b, c, d sú kladné čísla a ak $a \geqq b$, $c \geqq d$, potom $ac \geqq bd$. (Rovnosť nastane práve vtedy, keď súčasne $a = b$ aj $c = d$.)