ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Vojtech Filo, Piešťany, Lúčna 14; úlohy spolu s riešeniami prosíme posielať na jeho adresu.

Úloha A 1 (autor P. Bartoš). Ak $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n > 1$ sú kladné čísla, tak

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \ldots (a_n + a_1) \geqq 2^n a_1 a_2 \ldots a_n \tag{1}$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Dokážte.

Dôkaz. Podľa vety 1*)

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &\geqq 2\sqrt{a_1a_2} \quad &&(\text{rovnosť pri } a_1 = a_2)\\ a_2 + a_3 &\geqq 2\sqrt{a_2a_3} \quad &&(\text{rovnosť pri } a_2 = a_3)\\ &\ldots\\ a_{n-1} + a_n &\geqq 2\sqrt{a_{n-1}a_n} \quad &&(\text{rovnosť pri } a_{n-1} = a_n)\\ a_n + a_1 &\geqq 2\sqrt{a_na_1} \quad &&(\text{rovnosť pri } a_n = a_1)\end{aligned} \tag{2}$$

a podľa 2. vety dostaneme potom nerovnosť (1), pričom rovnosť platí práve vtedy, keď platí vo všetkých nerovnostiach (2), teda keď $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Poznámka 1. Nerovnosť (1) platí aj pre nezáporné čísla $a_1, \ldots, a_n$; žiaci vyšetria prípady, keď niektoré alebo všetky čísla sa rovnajú nule. V týchto prípadoch rovnosť nastane už vtedy, keď aspoň v jednej z dvojíc $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_n, a_1)$ sa obe čísla rovnajú nule.

Poznámka 2. Vetu možno formulovať aj takto: Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n > 1$, sú kladné čísla. Nech $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ sú dve permutácie indexov $1, 2, \ldots, n$. Potom

$$(a_{i_1} + a_{j_1})(a_{i_2} + a_{j_2}) \ldots (a_{i_n} + a_{j_n}) \geqq 2^n a_1 a_2 \ldots a_n$$

a rovnosť platí práve vtedy, keď súčasne $a_{i_1} = a_{j_1}, a_{i_2} = a_{j_2}, \ldots, a_{i_n} = a_{j_n}$.

*) V dnešných úlohách sa všade odvolávame na vety z práce P. Bartoša: Niektoré hľadiská výberu matematických úloh..., uverejnenej v tomto zväzku Matematických obzorov (str. 51–56).

Poznámka 3. Ak použijeme vetu 3, môžeme nerovnosť (1) doplniť

$$2^n \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geqq (a_1 + a_2) \ldots (a_n + a_1) \geqq 2^n a_1 a_2 \ldots a_n$$

a zovšeobecniť pre $1 < k \leqq n - 1$

$$k^n \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geqq$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) \ldots (a_n + a_1 + \ldots + a_{k-1}) \geqq k^n a_1 a_2 \ldots a_n$$

Úloha A 2 (autor P. Bartoš). Nech a, b sú nezáporné čísla, $n > 0$ reálne číslo a $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Dokážte, že

$$L = [(a + \operatorname{tg}\alpha)^n + (b + \operatorname{cotg}\alpha)^n] [(b + \operatorname{tg}\alpha)^n + (a + \operatorname{cotg}\alpha)^n] \geqq$$
$$\geqq 4 (a + 1)^n (b + 1)^n$$

a rovnosť platí práve vtedy, keď súčasne $a = b$ a $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Dôkaz. Podľa vety 1 a vety 2

$$L \geqq 2 \sqrt{(a + \operatorname{tg}\alpha)^n (b + \operatorname{cotg}\alpha)^n} \,.\, 2 \sqrt{(b + \operatorname{tg}\alpha)^n (a + \operatorname{cotg}\alpha)^n} =$$

$$= 4 \sqrt{\begin{array}{l}[a^2 + a (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha) + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha]^n \,. \\ . \, [b^2 + b (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha) + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha]^n\end{array}}$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď súčasne $a + \operatorname{tg}\alpha = b + \operatorname{cotg}\alpha$, $b + \operatorname{tg}\alpha = a + \operatorname{cotg}\alpha$. Odčítaním druhej rovnice od prvej dostaneme $a - b = b - a$ teda $a = b$ a po dosadení do prvej (alebo druhej) z týchto rovníc $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha$, teda $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Avšak $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \geqq$ $\geqq 2$ $\left(\text{rovnosť pri } \operatorname{tg}\alpha = 1 \text{ teda } \alpha = \frac{\pi}{4}\right)$. Potom použitím niekoľkých základných viet o nerovnostiach [od žiakov žiadať jednotlivé kroky napr. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha \geqq 2$, $a (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha) \geqq 2a$, $a^2 + a (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha) +$ $+ \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha \geqq a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$ atď.] máme konečne

$$L \geqq 4 \sqrt{(a^2 + 2a + 1)^n (b^2 + 2b + 1)^n} =$$
$$= 4 \sqrt{[(a + 1)^n (b + 1)^n]^2} = 4 (a + 1)^n (b + 1)^n$$

čo sme mali dokázať.

Poznámka. Úlohu možno formulovať aj ako otázku o minimálnej hodnote L, ktorá sa v danom obore rovná 4. Pokúsiť sa treba o zovšeobecnenie úlohy pre viac sčítancov, resp. viac činiteľov.