NIEKOLKO POZNÁMOK O KMEŇOVÝCH ZLOMKOCH

HELENA BEREKOVÁ, Bratislava

Zlomky tvaru $\frac{1}{n}$, kde n je prirodzené číslo, nazývame kmeňovými zlomkami. Symbol A_s, pre každé prirodzené číslo s, bude v ďalšom značiť množinu všetkých tých kladných racionálnych čísel, ktoré sa dajú vyjadriť ako súčet s kmeňových zlomkov. V tomto článku poukážeme na niektoré vlastnosti množín A_s.

Veta 1. Každá z množín A_s ($s \geqq 1$) je riedka v E_1^+ ($E_1^+ = \langle 0, \infty)$).

Dôkaz. Stačí dokázať, že každý otvorený interval na kladnej číselnej polosi obsahuje podinterval disjunktný s A_s. Nech (a, b) je ľubovoľný interval na kladnej polosi. Je známe, že ku každému $d > 0$ existuje $c < d$ tak, že $(c, d) \cap A_s$ je prázdna množina (pozri [1], str. 5). Potom na základe tohto výsledku existuje také a', $a < a' < b$, že $(a', b) \cap A_s = \emptyset$. Tým je dôkaz skončený.

Veta 2. Pre každé prirodzené číslo s je množina $A_{s+1} - A_s$ nekonečná.

Dôkaz. Do množiny A_{s+1} patria všetky čísla tvaru

$$\underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}}_{s \text{ sčítancov}} + \frac{1}{n} \quad (n \geqq 1),$$

ale žiadne z týchto čísel nepatrí do množiny A_s,

pretože najväčšie číslo množiny A_s je $\underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1}}_{s \text{ sčítancov}} = s$.

Množina A^d všetkých hromadných bodov množiny A sa nazýva deriváciou množiny A. Pre derivácie zavedených množín A_s platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 3. Nech s je prirodzené číslo. Potom $A^d_{s+1} = A_s \cup \{0\}$.

Dôkaz. Dokážeme inklúziu $A_s \cup \{0\} \subset A^d_{s+1}$ pre každé prirodzené číslo s. Vzťah $0 \in A^d_{s+1}$ vyplýva ihneď z rovnosti

$$0 = \lim_{n \to \infty} \frac{s+1}{n} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{s+1 \text{ sčítancov}}.$$

Nech $x \in A_s$, $x = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_s}$. Potom pre každé prirodzené číslo n je

$$y_n = \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_s} + \frac{1}{n} \in A_{s+1},\ y_n > x \text{ a } \lim_{n \to \infty} y_n = x.$$

Odtiaľ ihneď vyplýva, že $x \in A^d_{s+1}$. Tým je inklúzia $A_s \cup \{0\} \subset A^d_{s+1}$ dokázaná.

Teraz dokážeme platnosť inklúzie $A^d_{s+1} \subset A_s \cup \{0\}$ pre ľubovoľné prirodzené číslo s.

Ak $x \in A^d_{s+1}$, tak $x = \lim_{n \leftarrow \infty} y_n$, kde pre každé prirodzené číslo n je $y_n \in A^d_{s+1}$ a $y_n \neq x$. Nech y_n má vyjadrenie $y_n = \frac{1}{x_1^{(n)}} + \frac{1}{x_2^{(n)}} + \ldots + \frac{1}{x_{s+1}^{(n)}}$, pričom môžeme predpokladať $x_1^{(n)} \leqq x_2^{(n)} \leqq \ldots \leqq x_{s+1}^{(n)}$ pre každé n. Ak by existovalo také prirodzené číslo N, že pre všetky n by platilo $x_{s+1}^{(n)} \leqq N$, potom množina prvkov postupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ by bola konečná, nanajvýš N^{s+1} prvková a postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ by nemala požadované vlastnosti. Teda existuje prirodzené číslo k, $1 \leqq k \leqq s+1$, s vlastnosťou, že $\limsup_{n \to \infty} x_k^{(n)} = +\infty$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že symbolom k sme označili najmenšie prirodzené číslo s touto vlastnosťou. Taktiež môžeme predpokladať, že $\lim_{n \to \infty} x_k^{(n)} = +\infty$. (V opačnom prípade by sme vyšetrovali čiastočnú postupnosť $\{y_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ postupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ s vlastnosťou $\lim_{n_i \to \infty} x_k^{(n_i)} = +\infty$, existenciu ktorej nám zaručuje rovnosť $\limsup_{n \to \infty} x_k^{(n)} = +\infty$).

Ak $k = 1$, tak $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$ a inklúzia je dokázaná. V ďalšom predpokladajme $k > 1$. Pre každé i, $k \leqq i \leqq s+1$, je $\lim_{n \to \infty} x_i^{(n)} = +\infty$ a existuje prirodzené číslo N tak, že pre každé i, $1 \leqq i < k$, je $x_i^{(n)} \leqq N$. Súčty tvaru $\frac{1}{x_1^{(n)}} + \ldots + \frac{1}{x_{k-1}^{(n)}}$ môžu nadobudnúť len konečný počet, nanajvýš N^{k-1}

možností. Súčet $\frac{1}{x_k^{(n)}} + \ldots + \frac{1}{x_{s+1}^{(n)}}$ konverguje k nule. Pretože postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, počnúc istým indexom má teda každý jej člen y_n prvých $k - 1$ sčítancov rovnakých. Nech sú to sčítance $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{k-1}}$.

Zrejme potom $\lim_{n \to \infty} y_n = \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{k-1}} \in A_{k-1}$. Vzhľadom na platnosť inklúzie $A_m \subset A_{m+r-1}$ platnej pre všetky prirodzené čísla m a r (pozri [1], str. 1) je inklúzia $A_{s+1}^d \subset A_s \cup \{0\}$ dokázaná.

Nech Q^+ značí množinu všetkých kladných racionálnych čísel. Definujme pre $r \in Q^+$ funkciu N takto: $N(r)$ je najmenšie také prirodzené číslo s, pre ktoré $r \in A_s$.

Veta 4. V každom bode množiny Q^+ je oscilácia funkcie N rovná $+\infty$.

Dôkaz. Nech $r_0 \in Q^+$, $N(r_0) = k_0$. Nech m je ľubovoľné prirodzené číslo a nech $(r_0 - \delta, r_0 + \delta)$ je ľubovoľné okolie bodu r_0, $(\delta > 0)$. Zvoľme prirodzené číslo k také veľké, aby $k > k_0 + m$. Keďže množiny $A_s (s \geqq 1)$ sú riedke (pozri vetu 1), existuje taký interval $(r_1 - \delta_1, r_1 + \delta_1) \subset (r_0 - \delta, r_0 + \delta)$, že $r_1 \in Q^+$ a $(r_1 - \delta_1, r_1 + \delta_1) \cap A_s = \emptyset$ pre $s = 1, 2, \ldots, k$. Potom ale $N(r_1) \geq k + 1$, a tak

$$N(r_1) - N(r_0) \geq k + 1 - k_0 > k - k_0 > m.$$

Teda oscilácia funkcie N v bode r_0 je väčšia ako m.

Literatúra

[1] Holzer, L.: Zahlentheorie, Teil III. Leipzig 1965 (1—16).