ALGEBRAIZÁCIA ŠTRUKTÚRY „STRED DVOJICE BODOV"

JÁN GATIAL, DUŠAN KOLLÁR, Bratislava

Jeden zo silných prúdov súčasnej geometrie spočíva v tzv. algebraizácii geometrických štruktúr. V článku podávame ilustráciu o algebraizácii geometrického pojmu „stred 2 bodov". V prvej časti hľadáme takú algebraickú štruktúru, ktorá by „čo najlepšie vystihovala vlastnosti stredu", v druhej časti podávame malú ukážku, ako sa algebraizácia využíva na ďalšie štúdium.

Na „stred 2 bodov" v euklidovskej rovine E^2 hľadíme ako na binárnu operáciu (označme ju σ) v E^2

(1) $\sigma : E^2 \times E^2 \to E^2, \quad (a, b) \mapsto \text{stred dvojice } a, b = \sigma(a, b).$

Spomedzi všetkých algebraických vlastností stredu vyberieme štyri, ktoré, podľa nášho úsudku, najvýstižnejšie charakterizujú situáciu. Tieto vlastnosti uvedieme ako axiómy.

Nech N je množina, τ binárna operácia na N. Povieme, že τ spĺňa axiómu

Q – kvázigrupy, ak $\forall a, b \in Q (\exists!\ x \in Q \wedge \exists!\ y \in Q)$: $\tau(a, x) = b \wedge \wedge \tau(y, a) = b$;

C – komutativity, ak $\forall a, b \in Q$, platí $\tau(a, b) = \tau(b, a)$;

I – idempotentnosti, ak $\forall a \in Q$, platí $\tau(a, a) = a$;

M – mediality, ak $\forall a, b, c, d \in Q$, platí $\tau(\tau(a, b), \tau(c, d)) = \tau(\tau(a, c), \tau(b, d))$.

Je zrejmé, že (E^2, σ) spĺňa všetky 4 axiómy. To nás oprávňuje definovať algebraickú štruktúru, ktorú budeme považovať za algebraizáciu geometrického pojmu stred.

Definícia. Idempotentnú mediálnu a komutatívnu kvázigrupu (N, τ) budeme nazývať A-štruktúra. (N je množina a τ je binárna operácia.) Namiesto $\tau(a, b)$ píšeme tiež $a * b$.

Neprotirečivosť uvedeného systému axióm vyplýva z existencie nasledujúceho modelu:

Nech $N = R$ množina reálnych čísel a binárna operácia je aritmetický priemer, t. j.

$$a * b = \frac{1}{2}(a + b)$$

Ukážme, že definícia nie je redundantná, t. j. ukážeme, že každá z uvedených axióm Q, C, I, M je podstatná, čiže zvolený axiomatický systém neobsahuje zbytočnú axiómu. Dokážeme to tak, že skonštruujeme modely nových algebraických štruktúr, ktoré vzniknú tým, že ľubovoľnú z uvedených axióm nahradíme jej negáciou.

Príklad 1 (C, I, M, non Q).

Nech $N = R_+$ a binárna operácia $*$ je definovaná predpisom

$$a * b = \frac{1}{2}(a + b)$$

Splnenie axióm C, I, M je evidentné. Ukážeme, že $(R_+, *)$ nie je kvázigrupa. Skutočne, napríklad rovnica

$$5 * x = 1$$

nemá v R_+ riešenie. Je totiž (ak R_+ rozšírime na celé R)

$$1 = 5 * x = \frac{1}{2}(5 + x)$$

a to platí jedine pre $x = -3 \notin R_+$.

Príklad 2 (Q, I, M, non C).

Nech $N = R$ je množina reálnych čísel, operácia $*$ je daná predpisom

$$x * y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$$

Splnenie axióm Q a I je evidentné, axiómu M si overí čitateľ ľahko sám (pozri tiež [1], strana 33). Platí non C, lebo napríklad $6 * 0 = 2 \neq 3 = 0 * 6$.

Príklad 3 (Q, C, M, non I).

Nech $N = E^2$ množina bodov euklidovskej roviny, v ktorej fixne volíme bod E.

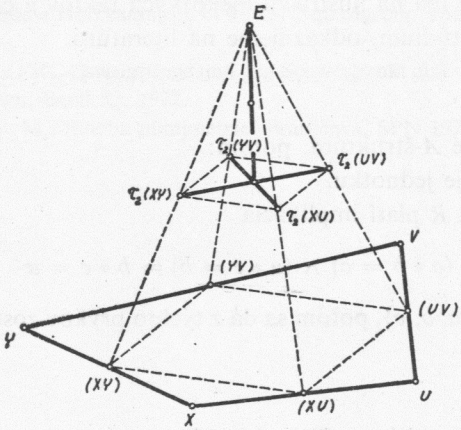
Operáciu τ definujeme predpisom

$$\tau(X, Y) = \sigma(E, \sigma(X, Y))$$

kde σ je popísaná vzťahom (1). Ešte zjednodušíme označenie $\tau(X, Y) = (XY)$.

Platnosť axióm Q, C je zrejmá. Dokážeme platnosť mediality. Nech X, Y, U, V sú body z E^2.

Z elementárnej geometrie vieme, že o úsečkách $(XY)(XU)$, $(XU)(UV)$, $(UV)(YV)$, $(XY)(YV)$ platí (*obr. 1*):



Obr. 1

Úsečka $(XY)(XU)$ je rovnobežná s úsečkou $(YV)(UV)$ a úsečka $(XU)(UV)$ je rovnobežná s úsečkou $(XY)(YV)$, z čoho vyplýva, že úsečka $\tau(XY)\tau(XU)$ je rovnobežná s úsečkou $\tau(YV)\tau(UV)$ a úsečka $\tau(XU) \cup \cup \tau(UV)$ je rovnobežná s úsečkou $\tau(XY)\tau(YV)$. Teda body $\tau(XY)$, $\tau(XU)$, $\tau(UV)$, $\tau(YV)$ sú vrcholy rovnobežníka, ktorého uhlopriečky sa pretínajú v strede, z čoho bezprostredne vyplýva platnosť axiómy M. Prípad, ak niektoré z bodov X, Y, U, V splynú, si čitateľ ľahko overí sám.

Platnosť non I je zrejmá, lebo pre každý bod $X \neq E$, platí $\tau(X, X) = x$.

Príklad 4 (Q, C, I, non M).

Nech $N = L^2$ je množina bodov Lobačevského roviny,

$\tau(xy)$ – Lobačevského stred dvojice bodov x, y.

Platnosť Q, C a I je zrejmá. Dokážeme teraz neplatnosť mediality. Predpokladajme, že axióma M platí. Potom pre $X = Y$ z N vyplýva, že dĺžka strednej priečky trojuholníka sa rovná polovici jeho základne. Toto tvrdenie je ekvivalentné s piatym euklidovským postulátom o rovnobežkách, čo protirečí Lobačevského postulátu o rovnobežkách. Spor.

Poučenie o Lobačevského geometrii nájde čitateľ v [4], kde na str. 46 a 47 je vyšetrený stred (úloha 32 – Veta 4).

Nezávislosť axióm Q, C, I, M je dokázaná.

Prvý problém je vyriešený. Druhý problém spočíva v štúdiu A-štruktúry. Tu sa obmedzíme iba na ilustráciu niekoľkých faktov a čitateľa, ktorý má záujem o hlbšie štúdium, odkazujeme na literatúru.

Veta.

Nech R je A-štruktúra, potom:

1. R neobsahuje jednotku.
2. Pre $a, b, c \in R$ platí implikácia

$$(a * b = c) \wedge (a * c = b) \Rightarrow b * c = a$$

3. Nech $N = \{a, b, c\}$, potom sa dá z týchto prvkov zostrojiť práve jedna A-štruktúra.

Dôkaz.

1. Nech existuje také $e \in R$, že $\forall a \in R : a * e = e * a = a$. Potom rovnica $a * x = a$, kde $a \neq e$ má dve riešenia $x_1 = e$, $x_2 = a$, čo je v spore s axiómou Q.

Tabuľka **1**

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

2. $a * b = c \Leftrightarrow (a * b) * b = c * b \Leftrightarrow (a * b) * (a * c) = b * c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a * a) * (b * c) = b * c \Leftrightarrow a * (b * c) = b * c$, teda $a = b * c$.

3. Z axiómy I a z 2. vyplýva (pozri *tab. 1*) $a * a = a$, $b * b = b$, $c * c = c$, $a * b = b * a = c$, $a * c = c * a = b$, $b * c = c * b = a$

Poznámka. Predkladaná práca má informatívny charakter. Čitateľom, ktorí majú o uvedenú problematiku záujem, odporúčame čítať články [2] a [3] používajúc základnú učebnicu [1].

Literatúra

[1] Belousov, V. D.: Osnovy teorii kvazigrupi lup. Moskva 1967.

[2] Gatial, J.: Some geometrical examples of an IMC-quasigroup. Matematický časopis 19, 292—298.

[3] Gatial, J.: Über die IMC-Quasigruppe und den Schwerpunkt eines Dreiecks. Mathematische Nachrichten, Band 53, 1972.

[4] Gatial, J.—Hejný, M.: Stavba planimetrie. Bratislava, SPN 1973.