NIEKTORÉ HĽADISKÁ VÝBERU MATEMATICKÝCH ÚLOH PRE PRÁCU V ŽIACKYCH KRÚŽKOCH

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Pri oceňovaní riešení súťažných úloh vo vlaňajšej MMO sa bralo do úvahy aj to, keď súťažiaci uviedol viac riešení tejže úlohy, alebo riešil aj nejaké jej zovšeobecnenie. Domnievam sa, že podporovanie takejto iniciatívy u žiakov je tak vo vyučovaní, ako aj v mimotriednej školskej práci veľmi dôležité. Týmto spôsobom sa účinne približuje žiakovi pôvab matematiky a práce s ňou a upútava k nej natrvalo jeho záujem. Okrem toho však vyvolávanie a pestovanie takejto iniciatívy u žiakov je vhodným prostriedkom propedeutiky samostatnej tvorivej práce v matematike, s ktorou treba čím prv započať, aby si žiak nadobudol určité formálne schopnosti na takúto prácu, nezávisle od látky, ktorá sa preberá, už na strednej škole.

Ak máme pri vyučovaní i tento cieľ pred očami, musíme voliť uvedomele tak obsah, ako aj sled úloh, ktoré žiakovi predkladáme. Aby som objasnil, čo tým myslím, zostavil som a usporiadal do súvislosti úlohy o nerovnostiach zamerané na to, aby sa žiak pri ich riešení učil používať analogické postupy a tvoriť postupne vety zložitejšie a všeobecnejšie. Zdá sa účelné preberať tieto úlohy systematicky v žiackom krúžku tak, že ich žiaci sami riešia, a potom v krúžku predvedú. V diskusii o úlohe sa učia hľadať dôsledky a ďalšie možnosti vyplývajúce z úlohy a formulovať nové problémy, na ktorých potom samostatne pracujú. Vyučujúci ich prácu nenápadne usmerňuje a ponecháva žiakovi čo najviac iniciatívy, na ktorej veľmi záleží.

Materiál obsiahnutý v týchto úlohách je takej povahy, že žiakov môže priviesť i k hodnotným výsledkom, súcim prípadne aj na publikovanie. Je veľmi dôležité, aby sme žiakom takúto možnosť, a to nie príliš vzdialenú a ťažko uskutočniteľnú, poskytovali. Škole by v tomto ohľade veľa mohli pomôcť vysokoškolskí pedagógovia.

Aby žiak v takomto krúžku mohol úspešne pracovať, treba sa v ňom opierať o povinnú učebnú látku. Okrem toho treba žiaka upozorniť i na vhodné pramene, ktoré použije pri svojej samostatnej práci v krúžku, čo je tiež jeden veľmi dôležitý cieľ, ktorý má práca v krúžku splniť a žiaka naučiť študovať odborné texty. Pri preberaní týchto úloh o nerovnostiach sú to napr. Korovkinove *Nerovnosti* (v zbierke *Populární přednášky o matematice*, SNTL), kniha F. Veselého *O nerovnostiach* (v zbierke *Škola mladých matematikov*) a dielo Juraja Bosáka *O nerovnostiach*, ktoré vyšlo v SPN v Bratislave.

Na úvod treba odvodiť niekoľko viet, čo možno urobiť vo vyučovaní, lebo sa ta dobre hodia. Sú to tieto dve vety:

Veta 1. Pre nezáporné čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \tag{1}$$

Táto veta sa v učebnici M_1 (slov. vydanie, str. 86) dokazuje vo forme málo odlišnej: Pre každú dvojicu reálnych čísiel a', b' platí

$$\frac{a'^2 + b'^2}{2} \geqq a'b'$$

a rovnosť práve vtedy, keď $a' = b'$. Ak v tejto nerovnosti položíme $a' = \sqrt{a}$, $b' = \sqrt{b}$, čo pri nezáporných číslach a, b sú skutočne reálne čísla a', b', dostaneme nerovnosť (1), v ktorej teda rovnosť platí práve vtedy, keď $a' = b'$, čiže keď $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, teda keď $a = b$.

Veta 2. Ak a, b, c, d sú kladné čísla a ak $a \geqq b$, $c \geqq d$, potom $ac \geqq bd$. (Rovnosť nastane práve vtedy, keď súčasne $a = b$ aj $c = d$.)

Dôkaz. Sú štyri možnosti: 1. $a > b$, $c > d$, vtedy podľa vety VII (M_1, str. 90) $ac > bd$; 2. $a > b$, $c = d$, vtedy podľa vety V (tamže, str. 88) $ac > bd$; 3. $a = b$, $c > d$, vtedy podľa tejže vety $ac > bd$ a 4. $a = b$, $c = d$, vtedy dosadením $ac = bd$. Nerovnosť $ac \geqq bd$ teda platí vo všetkých štyroch prípadoch, ale rovnosť len v prípade 4, čo sme chceli dokázať.

Poznámka. 1. Táto veta platí aj pre nezáporné čísla a, b, c, d čo si žiaci ľahko dokážu sami.

2. Veta 2 platí pre ľubovoľný počet nerovností a ľahko sa dokáže matematickou indukciou. Ak žiaci o nej ešte nevedia, možno sa uspokojiť odôvodnením, že súčin kladných čísel ľubovoľného počtu má vtedy najväčšiu (najmenšiu) hodnotu, keď každý jeho činiteľ má čo najväčšiu (najmenšiu) hodnotu.

3. Obdobná veta platí aj pre sčítanie nerovností. Na dôkaz použijeme vety VI a IV. Vetu formulujeme takto: Ak a, b, c, d sú ľubovoľné reálne čísla a ak platí $a \geqq b$ a $c \geqq d$, potom $a + c \geqq b + d$, pričom rovnosť platí práve vtedy, keď súčasne $a = b$, $c = d$. Aj táto veta platí pre ľubovoľný počet sčítaných nerovností.

V úlohách pôjde o aplikáciu týchto dvoch viet. V prvých dvadsiatich úlohách sa použijú spôsobom, ktorý nám ozrejmí nasledovný príklad:

Príklad 1. Ak a, b, c, d sú kladné čísla, tak

$$(ab + cd)(ad + bc) \geqq 4\,abcd \tag{2}$$

rovnosť platí práve vtedy, keď súčasne $a = c$ a $b = d$.

Dôkaz. Podľa vety 1 (po násobení oboch strán nerovnosti dvoma)

$$ab + cd \geqq 2\sqrt{abcd} \qquad \text{(rovnosť pri } ab = cd)$$

$$ad + bc \geqq 2\sqrt{abcd} \qquad \text{(rovnosť pri } ad = bc)$$

Podľa vety 2 potom

$$(ab + cd)(ad + bc) \geqq 4\,abcd$$

a podľa tejže vety rovnosť platí práve vtedy, keď súčasne $ab = cd$, $ad = bc$. Znásobením týchto rovníc máme

$$a^2bd = bc^2d$$

a (keďže ide o čísla kladné) dostaneme $a^2 = c^2$, teda $a = c$, a potom z oboch rovníc vyplýva $b = d$. Tým je dôkaz ukončený.

Poznámka. 1. Nerovnosť (2) platí aj pre nezáporné čísla, žiaci vyšetria prípady, keď z nich niektoré alebo všetky sa rovnajú nule a zistia či nerovnosť vždy platí a kedy platí rovnosť, podmienka rovnosti je tu odlišná.

2. V úlohe je charakteristické, že po použití vety 2. sa už nevyskytne druhá odmocnina z vety 1. To preto, lebo znásobením oboch odmocnín vznikla druhá odmocnina druhej mocniny. To isté sa stane aj pri iných tvaroch nerovností, napr.:

$$(a + bcd]\,(ad + bc) \geqq 4\,abcd,$$

$$(1 + abcd)(a + bcd) \geqq 4\,abcd,$$

$$(a + bc)(b + cd)(a + d) \geqq 8\,abcd$$

a pod. Podmienky rovnosti sú, pravda, vždy iné.

V úlohách druhej časti pôjde o prípady, v ktorých sa vety 1 a 2 použijú spôsobom, ktorý osvetlia nasledovné príklady:

Príklad 2. Ak a, b, c, d sú kladné čísla, tak

$$(ab + cd)\left(\frac{1}{ad} + \frac{1}{bc}\right) \geqq 4 \tag{3}$$

a rovnosť platí práve vtedy, keď súčasne $a = c, b = d$.

Dôkaz. Podľa vety 1

$$ab + cd \geqq 2\sqrt{abcd}$$

$$\frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{abcd}}$$

Podľa vety 2 potom dostaneme nerovnosť (3), v ktorej platí rovnosť práve vtedy, ak súčasne $ab = cd$ a $ad = bc$, odkiaľ vyplýva $a = c$, $b = d$, čím bolo tvrdenie dokázané.

Poznámka. 1. Nerovnosť (3) je jednoduchým dôsledkom nerovnosti (2), ak obe strany poslednej delíme súčinom $abcd$. Často je však výhodnejší postup ukázaný v príklade 2.

2. V príklade 2 je charakteristické to, že odmocniny, ktoré vznikli použitím vety 1, zmizli preto, lebo pri násobení nerovností sa ich súčin rovnal 1. Tento fakt možno dosiahnuť i pri iných tvaroch nerovností tohto typu, napr.

$$(a + bcd)\left(\frac{1}{ad} + \frac{1}{bc}\right) \geqq 4; \qquad (ab + cd)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{bcd}\right) \geqq 4$$

$$(1 + ab)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq 4; \qquad (a + bc)(1 + d)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(1 + \frac{1}{ad}\right) \geqq 16$$

a pod. Podmienky rovnosti sú však iné než pre nerovnosť (3).

Príklad 3. Ak a, b, c sú kladné čísla, potom

$$(a^2b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) \geqq 8 \tag{4}$$

a rovnosť platí práve vtedy, ak $a = b = c = 1$.

Dôkaz. Podľa vety 1

$$a^2b + c \geqq 2\sqrt{a^2bc} \qquad \text{(rovnosť pri } a^2b = c\text{)},$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \qquad \text{(rovnosť pri } a = b\text{)},$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{ac}} \qquad \text{(rovnosť pri } a = c\text{)}.$$

Podľa vety 2 pre viac nerovností dostaneme nerovnosť (4), v ktorej rovnosť platí, keď súčasne $a = b = c$ a $a^2b = c$, teda $a^3 = a$. Keďže $a > 0$, je $a^2 = 1$, teda $a = 1$, čím bolo tvrdenie dokázané.

Príklad 4. Pre kladné čísla a, b platí

$$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq 2^2 \tag{5}$$

rovnosť platí práve vtedy, ak $a = b$.

Dôkaz. Podľa vety 1 $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ a v oboch nerovnostiach platí rovnosť práve vtedy, ak $a = b$. Podľa vety 2 dostaneme nerovnosť (5) s podmienkou rovnosti $a = b$, čím bolo tvrdenie dokázané.

Poznámka. Pomocou nerovnosti (5) sa ľahko dokáže nerovnosť

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) =$$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geqq 3 + 3 \, . \, 2 = 9$$

a rovnosť platí, ak $a = b = c$. Tu sa použila veta o sčítaní súhlasných nerovností, spomenutá v poznámke 3 pri vete 2. Až budú žiaci samostatne používať v ďalšom spomenutú vetu 3, je dôkaz nerovnosti

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2$$

(rovnosť pri $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$) pre kladné čísla pomocou vety 2 veľmi jednoduchý

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \geqq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}}$$

odkiaľ znásobením dostaneme zovšeobecnenú nerovnosť (5).

Možné sú i iné spôsoby riešenia uvedených príkladov a treba uvítať, ak s nimi žiaci na základe vlastnej invencie prídu. Metóda, ktorú sme ukázali, ukáže sa v ďalších úlohách ako veľmi použiteľná a plodná. Vychádzajúc z jednoduchých viet, prídeme k výsledkom, ktoré nebudú vždy jednoduché.

Po prebratí úloh, ktoré budú na pokračovanie uverejnené, majú žiaci možnosť doplnenia a zovšeobecnenia výsledkov, ak na mieste 1. vety použijú túto vetu:

3. veta o komparabilite (porovnateľnosti) aritmetického a geometrického priemeru nezáporných čísiel:

Nech a_n, $n \geqq 1$ sú nezáporné čísla. Potom

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, ak $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Dôkaz tejto vety nájdu žiaci v odporúčanej literatúre.

Ešte sú ďalšie možnosti zovšeobecňovania všetkých nerovností, ak sa použijú vety o tzv. vážených priemeroch aritmetických, geometrických, mocninných atď., ako sú napr. vety 6, 9, 10, 16 a iné v diele autorov G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya: *Inequalities* (Cambridge, 1934).

Na niektoré použitia vety 3 sa poukazuje v poznámkach pripojených k jednotlivým úlohám. Tieto poznámky sú určené výlučne pre učiteľa, ktorý ich má žiakom naznačiť tak zďaleka, aby neporušil ich radosť z vlastnej invencie.

Materiál možno použiť už od 1. ročníka. Vo vyšších ročníkoch môže žiak už samostatne pracovať, pričom sa úlohy neprebraté v predošlých ročníkoch použijú na osviežením pamäti žiakov. Významné je, že žiakovi sa automaticky otvára perspektíva pre ďalšiu samostatnú prácu. Pritom je dôležitejšie, že žiak nadobúda formálne schopnosti pre tvorenie a riešenie matematických problémov, než je látka, v ktorej sa pracuje (hoci i tá je veľmi užitočná). To sa zdôrazňuje preto, lebo nielen pri súťažiach MO a MMO, ale aj u poslucháčov vysokých škôl, sa prejavuje istý nedostatok týchto formálnych schopností, a preto treba hľadať cesty nápravy. Domnievam sa, že jednou z nich by mohla byť metóda práce v krúžkoch, ktorej skromný príklad predvediem. Vysokoškolskí pedagógovia so širokým vedeckým rozhľadom by mohli navrhnúť dokonalejšie riešenie. Hlavné je, aby práca žiaka bola z 50 % akousi stavebnicovou hrou budúceho staviteľa a z 50 % vážnou prácou začiatočníka a učňa vo vedeckej práci. Dúfam, že k niečomu podobnému sa môj námet blíži.

Poznámka redakcie. Uverejnením tohto článku zahajujeme rubriku úloh podobného rázu ako navrhuje P. Bartoš. Prosíme čitateľov, aby nám posielali podobné úlohy na uverejnenie. Ako prvé v nasledujúcej rubrike Úlohy pre prácu matematických krúžkov uvádzame niektoré úlohy súvisiace s článkom P. Bartoša. V uverejňovaní týchto úloh budeme pokračovať aj v ďalších zväzkoch Matematických obzorov.

Redakcia