O TRANSFORMÁCIÁCH POSTUPNOSTÍ

JOZEF ANTONI, Bratislava

Pojem *limity* je jedným zo základných pojmov matematickej analýzy. Dávnejšie sa ukazovala potreba tento pojem zovšeobecniť, a to hlavne pojem *limita postupnosti.* Pri skúmaní Fourierových radov sa zistili prípady spojitých funkcií, pre ktoré ich Fourierov rad bodovo nekonvergoval. Ak sa ale limita postupnosti čiastočných súčtov definovala všeobecnejšie, ukázalo sa, že v tomto všeobecnejšom zmysle už Fourierov rad konverguje (dokonca rovnomerne). To je približný obsah známej *Fejérovej vety,* pričom zovšeobecnenou limitou postupnosti sa v nej myslí toto: Postupnosti $\{x_k\}$ priradíme postupnosť $\left\{\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right\}$, a ak existuje limita tejto postupnosti, prehlásime ju za zovšeobecnenú limitu postupnosti $\{x_k\}$. Táto metóda je známa pod názvom *Cesàrova metóda* prvých aritmetických stredov alebo krátko *metóda (C, 1).* Touto metódou môžeme prehlásiť za konvergentné také postupnosti, ktoré nie sú konvergentné v bežnom zmysle; napr. postupnosti 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, . . . priradíme metódou $(C, 1)$ postupnosť $\{\sigma_k\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \ldots$, všeobecne $\sigma_{3k} = \frac{1}{3}$, $\sigma_{3k+1} = \dfrac{k+1}{3k+1}$ a $\sigma_{3k+2} = \dfrac{k+1}{3k+2}\cdot$ Vidíme, že limita tejto postupnosti sa rovná $\frac{1}{3}\cdot$ Nie každá postupnosť má zovšeobecnenú limitu danú metódou $(C, 1)$. Napríklad postupnosť $\{x_k\}$, kde

$$x_k = \begin{cases} 1 & 2^{n-1} < k \leqq 2^n \text{ pre } n \text{ nepárne} \\ 0 & 2^{n-1} < k \leqq 2^n \text{ pre } n \text{ párne}, n = 0 \end{cases}$$

t. j. postupnosť 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, . . . nemá limitu, lebo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_1+x_2+\ \ldots\ +x_2 2k}{2^{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+4+4^2+\ldots+4^{k-1}}{2^{2k}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{4^k-1}{3\cdot 2^{2k}} = \frac{1}{3}$$

a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_1+x_2+\ldots+x_2k+1}{2^{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+4+4^2+\ldots+4^k}{2^{2k+1}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{4^{k+1}-1}{3\,.\,2^{2k+1}} = \frac{2}{3}$$

Metóda $(C, 1)$ má ešte tú vlastnosť, že každej konvergentnej postupnosti priradí postupnosť, ktorá má tú istú limitu. Túto vlastnosť si môžeme overiť takto: Nech postupnosť $\{x_k\}$ konverguje k číslu s. Máme dokázať, že aj postupnosť $\left\{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right\}$ konverguje k číslu s. Nech $\varepsilon > 0$. Pretože postupnosť $\{x_k\}$ konverguje k s, existuje také prirodzené číslo n_0 (závislé od ε), že pre $n \geqq n_0$ platí $|x_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zvoľme n_1 tak, že pre $n \geqq n_1$ platí $\frac{|x_i - s|}{n} < \frac{\varepsilon}{2n_0}$ pre $1 \leqq i \leqq n_0$. Potom pre $n \geqq \max(n_0, n_1)$ platí:

$$\left|\frac{x_1+x_2+\ldots x_n}{n} - s\right| = \frac{|x_1 - s + x_2 - s + \ldots + x_n - s|}{n} \leqq$$

$$\leqq \frac{|x_1 - s|}{n} + \frac{|x_2 - s|}{n} + \cdots + \frac{|x_{n_0} - s|}{n} + \cdots + \frac{|x_n - s|}{n} <$$

$$< n_0 \frac{\varepsilon}{2n_0} + \frac{n-n_0}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Pretože ε bolo ľubovoľné kladné číslo, dokázali sme, že postupnosť $\left\{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right\}$ konverguje k s.

O takýchto zovšeobecnených limitách sa hovorí v článku [2].

Spôsob priraďovania postupností, hovoríme aj transformácie postupností, je daný najčastejšie nekonečnou maticou (a_{mn}) takto: Postupnosti $x = \{x_n\}$ sa priradí postupnosť $\sigma(x) = \{\sigma_m(x)\}$ podľa vzťahu

$$\sigma_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n$$

Súčtom postupností $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ nazývame (ako obvykle) postupnosť $\{x_n + y_n\}$. *Násobkom postupnosti* $\{x_n\}$ číslom a rozumieme postupnosť $\{ax_n\}$. Pod *transformáciou* budeme rozumieť zobrazenie σ, ktoré priraďuje jednej postupnosti inú postupnosť. Pod *lineárnou transformáciou* rozumieme transformáciu σ, ktorá spĺňa podmienky

$$\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$$
$$\sigma(ax)=a\sigma(x), \text{ pre každé reálne číslo } a$$

V nasledujúcich príkladoch je uvedených niekoľko transformácií.

1. Transformácia σ_1 je daná vzťahom: každej postupnosti $\{x_n\}$ priradíme postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. Ľahko zistíme, že táto transformácia nie je lineárna.

2. Transformácia σ_2, ktorá priraďuje postupnosti $\{x_n\}$ postupnosť $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$, je lineárna.

3. Nech $\{a_n\}$ je pevná postupnosť reálnych čísiel.
Transformácia T, ktorá priraďuje postupnosti $\{x_n\}$ postupnosť $\{a_n x_n\}$, je lineárnou transformáciou.

4. Transformácia, ktorá priraďuje postupnosti $\{x_n\}$ postupnosť $\left\{\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right\}$, je tiež lineárnou transformáciou. Všimnime si bližšie transformáciu z príkladu 3. Túto transformáciu môžeme vyjadriť pomocou matice (a_{mn}), kde $a_{nn}=a_n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) a $a_{mn}=0$ pre $m \neq n$. Vlastnosti transformácie závisia od výberu postupnosti $\{a_n\}$. Ak $\{a_n\}$ je ohraničená postupnosť, tak touto transformáciou sa transformujú ohraničené postupnosti na ohraničené postupnosti. Ak $\{a_n\}$ je konvergentná postupnosť, tak konvergentné postupnosti sa transformujú na konvergentné postupnosti. V prípade, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ pre každú konvergentnú postupnosť.

Cvičenie 1. Napíšte transformácie z príkladov 2 a 4 pomocou nekonečnej matice.

Cvičenie 2. Napíšte maticu pre metódu $(C, 1)$.

Vlastnosti transformácie danej nekonečnou maticou závisia od prvkov matice. Uvedieme bez dôkazov podmienky, ktoré sú nutné a postačujúce na to, aby transformácia daná nekonečnou maticou transformovala každú ohraničenú postupnosť na ohraničenú postupnosť, príp. každú konvergentnú postupnosť na konvergentnú postupnosť. Dôkazy týchto viet, okrem pôvodných prác, môžeme nájsť v [1] a [3].

Veta 1 (Toeplitzova — Kojimova veta). Lineárna transformácia daná maticou (a_{mn}) transformuje každú ohraničenú postupnosť na ohraničenú postupnosť vtedy a len vtedy, ak existuje taká konštanta M, že pre každé prirodzené číslo m platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \leqq M \tag{1}$$

Príklad 6. Transformácia daná maticou (b_{mn}), kde

$$b_{1n} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}, \; b_{mn} = 2^{-2n+1} \text{ pre } m > 1 \text{ a } n \leqq m$$

a $b_{mn} = 0$ pre $n > m$, transformuje každú ohraničenú postupnosť na ohraničenú postupnosť. Ľahko sa zistí, že podmienka (1) je splnená, ak za M zvolíme ľubovoľné číslo, ktoré nie je menšie než 2.

Cvičenie 3. Ukážte, že transformácia z príkladu 6 netransformuje každú konvergentnú postupnosť na konvergentnú postupnosť.

Veta (Kojimova — Schurova veta). Lineárna transformácia daná nekonečnou maticou (a_{mn}) transformuje každú konvergentnú postupnosť na konvergentnú postupnosť vtedy a len vtedy, keď sú splnené podmienky:

a) existuje taká konštanta M, že pre všetky m platí (1);

b) pre každé n existuje $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn} = \alpha_n$;

c) existuje $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \alpha$.

Potom platí:

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x_n - \lim_{k\to\infty} x_k)$$

Dôsledok (Toeplitzova veta). Lineárna transformácia daná nekonečnou maticou (a_{mn}) transformuje každú konvergentnú postupnosť na takú konvergentnú postupnosť, že limity obidvoch postupností sú rovnaké vtedy a len vtedy, keď sú splnené podmienky a), b), c) a $\alpha_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\alpha = 1$.

Takéto metódy sa nazývajú *regulárnymi metódami limitovania* (často aj sumovania) alebo *zovšeobecnenými limitami.* Príkladom regulárnych transformácií sú transformácie uvedené v príklade 4; v príklade 3, keď platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, metóda $(C, 1)$. Príklady ďalších takýchto transformácií ešte uvedieme.

Nech $\{p_n\}$ je postupnosť nezáporných čísiel, ktoré sa všetky nerovnajú nule $(p_1 > 0)$. Položme $P_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ pre $n = 1, 2, \ldots$.

Príklad 7. Transformáciu danú maticou (a_{mn}), kde $a_{mn} = \dfrac{p_{m-n+1}}{P_m}$ pre $n \leqq m$

a $a_{mn} = 0$ pre $n > m$, nazývame *Nörlundovou sumačnou metódou* a označujeme krátko (N, p_n).

Z dôsledku vyplýva, že Nörlundova sumačná metóda je zovšeobecnenou limitou práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{P_n} = 0$. Dôkaz tohto tvrdenia si čitateľ môže urobiť ako cvičenie (pozri [3]).

Jednou z vlastností regulárnych Nörlundových metód je nasledujúca vlastnosť: Nech (N, p_n) a (N, q_n) sú dve regulárne sumačné metódy. Nech postupnosť $x = \{x_n\}$ každou z týchto metód sa transformuje na konvergentnú postuposť (môžu to byť dve rôzne postupnosti). Potom obidve transformované postupnosti majú tú istú limitu.

Príklad 8. Transformáciu danú maticou (a_{mn}), kde $a_{mn} = \frac{p_n}{P_n}$ pre $n \leqq m$ a $a_{mn} = 0$ pre $n > m$, nazývame *Rieszovou sumačnou metódou* a krátko ju označujeme (R, p_n).

Cvičenie 4. Zistite, za akých podmienok, kladených na postupnosť $\{p_n\}$, je (R, p_n) metóda regulárna.

Cvičenie 5. Ukážte, že metóda $(C, 1)$ je špeciálnym prípadom Rieszovej aj Nörlundovej metódy.

Návod. Ukážte, že matica metódy $(C, 1)$ sa dá vyjadriť pomocou vhodne zvolenej postupnosti $\{p_n\}$.

Cvičenie 6. Ukážte, že metóda (N, p_n), kde $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = 6$ a $p_n = 0$ pre $n > 3$, je regulárna.

Cvičenie 7. Nájdite všetky postupnosti, ktoré sa transformujú transformáciou z cvičenia 6 na konvergentné postupnosti.

Cvičenie 8. Napíšte maticu metódy (R, p_n), kde $p_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, a zistite zovšeobecnenú limitu postupnosti 0, 1, 0, 1, 0, ...

Literatúra

[1] Cooke, R. G.: Infinite matrices and sequence spaces. Ruský preklad: Moskva 1960.

[2] Červeňanský, J.: O sumovaní postupností a radov. Matematické obzory 2, 1972, s. 41 až 46.

[3] Šalát, T.: Nekonečné rady. Praha 1974.