ÚLOHY A PROBLÉMY

Rubriku vedie Štefan Znám, Katedra algebry a teórie čísel PFUK, Mlynská dolina, 816 31 Bratislava. Riešenie úloh v tomto zväzku pošlite na adresu vedúceho rubriky do 31. marca 1974.

B. 15. Sú dané prirodzené čísla a, n. Určte všetky celé čísla x tak, aby číslo

$$\frac{u^n - x}{u - a}$$

bolo celé číslo pre všetky prirodzené čísla u.

B. 16. Určte všetky riešenia rovnice

$$(x^2 + 4)(x + 2y)^2 = 32x^2y$$

v kladných číslach.

B. 17. Napíšte takú sústavu dvoch lineárnych rovníc so štyrmi neznámymi, ktorej riešením sú cifry každého z čísel 1441, 2350, 1973 a určte všetky zvyšné štvorciferné čísla, ktorých cifry sú riešením tej sústavy.

B. 18. Určte všetky dvojice (x, y) prirodzených čísel také, že čísla

$$\frac{x+2}{y}, \quad \frac{y+3}{x}$$

sú celé.

B. 19. Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Určte aspoň štyri rôzne dvojice prirodzených čísel (x, y), pre ktoré sú čísla

$$\frac{x+k}{y}, \quad \frac{y+k}{x}$$

celé.

B. 20. Nech čísla $b, a_1, \ldots, a_n$, $n \geqq 2$ sú kladné čísla, u, v reálne a nech platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^u = b^u.$$

Potom pre $v > u$ je

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^v < b^v,$$

pre $v < u$ je

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^v > b^v.$$

Dokážte! P. Bartoš

Ospravedlňujeme sa čitateľom za krátkosť termínu na riešenie úloh z 3. čísla.

Správne riešenie úloh z tretieho čísla nám poslali:

RNDr. P. Bartoš, Bratislava, Sibírska 9: B.9, B.10, B.14;
RNDr. M. Franek, Prievidza 1519 - A 1: B.9, B.10, B.11, B.12, B.13, B.14;
A. Hnáth, Michalovce, Gymnázium, Gottwaldova 1: B.9, B.10, B.14;
S. Slovák, Trnava, Prednádražie E-3: B.13;
M. Zajac, Bratislava, Suché Mýto 5: B.9, B.14.

Riešenie niektorých úloh z 2. čísla:

B. 3. (M. Franek)

Pre každé riešenie f danej funkcionálnej rovnice a pre ľubovoľné $x \in (1, \infty)$ dostávame dosadzovaním hodnôt x, x^2, ... namiesto y postupne

$$f(x^2) = x^{-1}f(x), \quad f(x^3) = x^{-2}f(x), \quad \ldots$$

Indukciou dokážeme pre všetky $x \in (1, \infty)$

$$f(x^n) = x^{1-n}f(x); \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Pre $n = 1$ to platí. Indukčný krok:

$$f(x^{n+1}) = f(xx^n) = \frac{f(x) + f(x^n)}{x + x^n} = \frac{f(x) + x^{1-n}f(x)}{x + x^n} = x^{1-n+1}f(x).$$

Teraz ukážeme, že pre ľubovoľné kladné racionálne r a pre všetky $x \in (1, \infty)$ platí

$$f(x^r) = x^{1-r}f(x). \tag{2}$$

Pre $r = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ dostávame podľa (1)

$$f(x) = f\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = x^{\frac{1}{n}-1} f(x^r) = x^{r-1}f(x^r),$$

t. j. platí (2). Pre $r = \dfrac{m}{n}$, kde m a n sú prirodzené čísla, platí podľa predošlého

$$f(x^r) = f\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-m} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = x^{\frac{1}{n}-\frac{m}{n}} x^{1-\frac{1}{n}} f(x) = x^{1-r}f(x).$$

Z rovnice (2) dostaneme pre všetky $x \in M = \{x \in (1, \infty);\ \ln x \in Q^+\}$, kde Q^+ je množina všetkých kladných racionálnych čísel, vzťahy

$$f(x) = f(e^{\ln x}) = e^{1-\ln x} f(e) = \frac{k}{x},$$

kde $k = ef(e)$.

Ak označíme $g\colon y \to e^y$, kde $y \in (0, \infty)$, tak $g((0, \infty)) = (1, \infty)$, $g(Q^+) = M$. Pretože g je spojitá funkcia a Q^+ je množina hustá v $(0, \infty)$, je aj množina M hustá v $(1, \infty)$. Na tejto množine má funkcia f rovnaké hodnoty s funkciou $f_1\colon x \to \frac{k}{x}$ $(x \in (1, \infty)$, kde $k = ef(e)$, a preto $f = f_1$. Každé riešenie úlohy má teda tvar $f\colon x \to \frac{k}{x}$ $(x \in (1, \infty))$, kde k je reálna konštanta. Dosadením do funkcionálnej rovnice sa presvedčíme, že každá funkcia tohoto tvaru je riešením.

B. 6. (P. Bartoš)

Uvažujme oporné roviny, ktoré majú spoločný bod D. Tieto roviny musia vytvoriť konvexný trojhran. Táto nutná podmienka je pre existenciu štvorstena $ABCD$ aj postačujúca, lebo potom akékoľvek kladné dĺžky AD, BC, CD určujú štvrtú opornú rovinu, ktorá neprechádza vrcholom D ani nie je s nijakou z ostatných oporných rovín rovnobežná a trojhran delí na dva konvexné štvorsteny; z nich ten konečný je štvorsten $ABCD$.

Nutná a postačujúca podmienka, aby trojhran s vrcholom D bol konvexný je, aby súčet uhlov $\alpha = \sphericalangle BCD$, $\beta = \sphericalangle ADC$, $\gamma = \sphericalangle ADB$ bol menší než 2π a každý z nich patril do intervalu $(0, \pi)$. To sa stane práve vtedy, keď

$$\left|\frac{d^2 + e^2 - c^2}{2ed}\right| < 1; \quad \left|\frac{e^2 + f^2 - a^2}{2ef}\right| < 1; \quad \left|\frac{f^2 + d^2 - b^2}{2fd}\right| < 1 \qquad (1)$$

a súčasne

$$\arccos\frac{d^2 + e^2 - c^2}{2de} + \arccos\frac{e^2 + f^2 - a^2}{2ef} + \arccos\frac{f^2 + d^2 - b^2}{2fd} < 2\pi. \qquad (2)$$

Nerovnosti (1) sú ekvivalentné trojuholníkovým nerovnostiam v trojuholníkoch ABD, BCD, CAD.

Podmienky (1) a (2) možno vysloviť pre ktorýkoľvek z vrcholov štvorstena, ale stačí ich vysloviť pre jeden vrchol.