# HERONOV VZOREC A ZVONKA VPÍSANÉ KRUŽNICE

MILOŠ FRANEK, Prievidza

Kružnicu dotýkajúcu sa práve jednej strany trojuholníka a priamok, na ktorých ležia ostatné dve, nazývame zvonka vpísanou kružnicou. V článku odvodíme vzorce pre polomery zvonka vpísaných kružníc a v súvislosti s tým podáme jednoduchý dôkaz Heronovho vzorca. Poznamenajme, že zápis typu $AB$ použijeme ďalej tak na označenie úsečky, ako aj jej dĺžky (druhá možnosť nastane práve vtedy, keď sa taký zápis vyskytne v akejsi rovnosti).

Použijeme tieto známe fakty:

(a) Priesečník dvoch rôznobežných dotyčníc tej istej kružnice má od dotykových bodov rovnaké vzdialenosti.

(b) Osi uhlov vytvorených dvoma rôznobežkami sú na seba kolmé.

(c) Ostré uhly s navzájom kolmými ramenami sú zhodné.

(d) Polomer $\varrho$ kružnice vpísanej trojuholníku je daný vzorcom

$$\varrho = \frac{P}{s}$$

kde $P$ je plošný obsah trojuholníka a $s$ je jeho polovičný obvod.

(e) Pri obvyklom označení základných prvkov trojuholníka sa vzdialenosť vrchola $A$ od dotykových bodov vpísanej kružnice so stranami $AB$, $AC$ rovná hodnote $s - a$. Vzdialenosti vrcholov $B$, $C$ od „príslušných" dotykových bodov sú v tomto poradí: $s - b$, $s - c$.

V trojuholníku $ABC$ s plošným obsahom $P$, polovičným obvodom $s$ a s obvyklým označením dĺžok strán označme zápismi $k \equiv (S; \varrho)$, $k_a \equiv (S_a; \varrho_a)$ v tomto poradí vpísanú kružnicu a kružnicu zvonka vpísanú, ktorá sa dotýka strany $BC$ (*obr. 1*). Dotykový bod kružnice $k$ so stranou $AB$ nech je $T$ a dotykové body kružnice $k_a$ s priamkami $BC$, $CA$, $AB$ budú v tomto poradí $T_1$, $T_2$, $T_3$.

Na základe (a) dostaneme

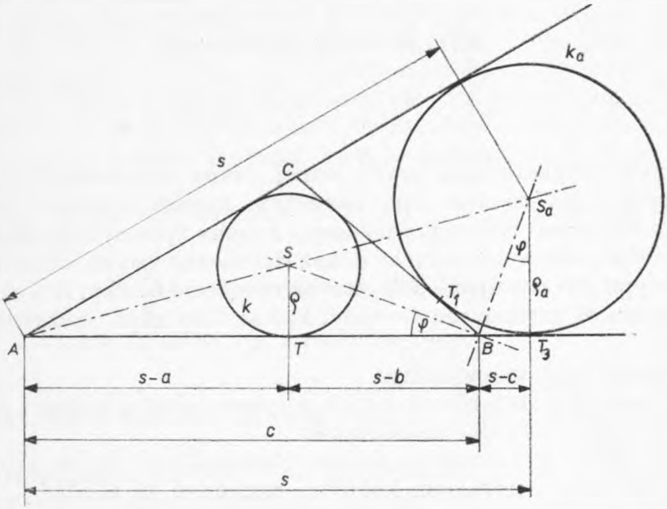
$$AT_3 + AT_2 = (AB + BT_3) + (AC + CT_2) = AB + BT_1 + AC + CT_1 =$$
$$= (BT_1 + T_1C) + AC + AB = a + b + c = 2s$$

čiže

$$AT_3 + AT_2 = 2s$$

Podľa (a) platí $AT_3 = AT_2$, čiže aj

$$AT_2 = AT_3 = s \tag{1}$$




Z tvrdenia (e) vyplýva

$$AT = s - a$$

$$TB = s - b$$

a podľa (1) zase

$$BT_3 = s - c$$

Teraz už ľahko vypočítame polomer $\varrho_a$ z podobnosti

$$\Delta AT_3S_a \sim \Delta\, ATS$$

a z tvrdenia (d)

$$\frac{\varrho_a}{s} = \frac{S_aT_3}{T_3A} = \frac{ST}{TA} = \frac{\varrho}{s-a}, \qquad \varrho = \frac{P}{s},$$

$$\varrho_a = \frac{P}{s-a} \tag{2}$$

Cyklickou zámenou dostávame vzorce

$$\varrho_b = \frac{P}{s - b}$$

$$\varrho_c = \frac{P}{s - c}$$

pre zvonka vpísané kružnice $k_b \equiv (S_b; \varrho_b)$, $k_c \equiv (S_c; \varrho_c)$, ktoré sa v tomto poradí dotýkajú strán $CA$, $AB$.

Pomocou predošlých výsledkov odvodíme Heronov vzorec. Podľa (b), (c) zistíme, že trojuholníky $BTS$, $S_aT_3B$ sú podobné a platí

$$\frac{\varrho_a}{s - c} = \frac{S_aT_3}{T_3B} = \frac{BT}{TS} = \frac{s - b}{\varrho}$$

$$\varrho\varrho_a = (s - b)(s - c)$$

Odtiaľ dosadením podľa (d) a (2);vychádza

$$P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

Pre zaujímavosť uveďme v tejto súvislosti túto úlohu XIV. roč. MO, ktorá vtedajším účastníkom kategórie A robila najväčšie ťažkosti:

V rovine sú dané vedľajšie uhly $\sphericalangle MON$, $\sphericalangle NOP$ a vo vnútri uhla $\sphericalangle NOP$ je daný bod $Q$. Bodom $Q$ veďte priamku, ktorá s polpriamkami $OM$, $ON$ ohraničuje trojuholník, ktorého obvod sa rovná danému kladnému číslu $2s$.