ANALOGIE HLAVNÍCH KRUŽNIC NA PRAVIDELNÝCH TĚLESECH

JIŘÍ MUSIL, Brno

Úvod

Modernisace výuky matematiky přináší s sebou nejen novou tematiku, ale i nové pohledy na klasické partie. Z látky dříve probírané se vypouští určitá temata. V geometrii, které se tyto změny týkají snad v největší míře, jsou to např. úlohy na konstrukci trojúhelníka. Je teda třeba vnést do výuky geometrie nové pohledy, které by byly v souladu s nynějším pojetím matematiky. V tomto pojetí je psána i nová učebnice pro střední školy [1] vydaná před několika měsíci, za které vyšel základní námět článku. Geometrie ani v tomto moderním pojetí neztratila na své důležitosti. Jedním z jejích odvětví, které dovede upoutat pozornost, zvýšit představivost studentů a má praktické aplikace, jsou např. metrické vlastnosti rozmanitých ploch.

V tomto článku řešíme jednu otázku z geometrie ploch, které jsou pro žáky velmi názorné — otázka existence uzavřených lomených čar na pravidelných (konvexních) mnohostěnech, které jsou jistou analogií hlavních kružnic na kouli. Běžný postup, jakým lze nalézt všechny hledané analogie, je ve své podstatě jednoduchý, u složitějších případů je však tak pracný, že se stává nepoužitelným. V závěru článku ukážeme princip jiné, efektívnější metody, kterou lze pro nalezení čar a určení jejich počtu i u těchto případů použít.

2. Hlavní kružnice

Pojem hlavní kružnice je každému zajisté dobře znám. Připomeňme jenom, že se jedná o takovou kružnici ležící na dané kouli, jejíž střed leží ve středu koule, a uveďme některé vlastnosti hlavních kružnic:

1. Ze všech kružnic ležících na kouli mají hlavní kružnice největší poloměr shodný s poloměrem koule.

Libovolnými dvěma body na kouli, které neleží na témž průměru, lze vést právě jednu hlavní kružnici.

3. Kratší oblouk určený body A, B má nejmenší délku ze všech možných křivek na kouli spojujících body A, B. Délka uvedeného oblouku se nazývá *sférická vzdálenost*.

4. Všechny hlavní kružnice dostaneme jako průniky s rovinami procházejícími středem koule.

3. Pravidelné konvexní mnohostěny

Definice 3.1. Mnohostěn nazveme *pravidelným*, jestliže má následující vlastnosti (uvažujeme jen konvexní mnohostěny[1]):

Všechny jeho stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky.

2. Počet hran vycházejících z každého vrcholu je stejný (vrchol je teda společný vždy stejnému počtu stěn).

Uvedené definici vyhovují tyto mnohostěny:

1. *čtyřstěn* . . . ohraničen čtyrmi rovnostrannými trojúhelníky
2. *šestistěn (krychle)* . . . ohraničen šesti čtverci
3. *osmistěn* . . . ohraničen osmi rovnostrannými trojúhelníky
4. *dvanáctistěn* . . . ohraničen dvanácti pětiuhelníky
5. *dvacetistěn* . . . ohraničen dvaceti rovnostrannými trojúhelníky

4. Určení vzdálenosti dvou bodů na povrchu mnohostěnu

V této kapitole zformulujeme přesně problém naznačený již v úvodu: Hledáme všechny uzavřené lomené čáry na povrchu libovolného pravidelného mnohostěnu, které by měly vlastnost analogickou vlastnosti (3) hlavní kružnice na kouli.

Definice 4.1. *Vzdáleností dvou bodů* na povrchu mnohostěnu nazveme délku nejkratší lomené čáry spojující oba body a ležící na povrchu mnohostěnu.

Definice 4.2. *Hlavní čarou L* nazveme takovou uzavřenou lomenou čáru na povrchu pravidelného mnohostěnu, že vzdálenost libovolných dvou jejích bodů A, B je rovna délce kratšího z úseků vymezených na čáře body A, B (případně libovolnému z nich, jsou-li oba stejně dlouhé).

Je zřejmé, že vlastnost (3) hlavních kružnic mají právě hlavní čáry.

---

[1] Mnohostěn nazveme *konvexním*, jestliže s každými dvěma body obsahuje i úsečku těmito body určenou.

Je nutné zdůraznit, že hledáme všechny možné čáry L, které se uzavřou přes libovolný počet stěn. (Uvažujeme i ty, které nedostaneme žádným řezem.)

V prvé řade tedy vzniká problém nalezení *nejkratší možné vzdálenosti* dvou bodů na povrchu mnohostěnu. (Mnozí čtenáři jistě znají prastarou úlohu o nalezení nejkratší cesty pavouka k mouše, jsou-li oba v různých bodech krychlové místnosti. Hledání nejkratší vzdálenosti je vlastně zobecněním této úlohy na libovolný mnohostěn.)

Lomená čára, která bude realisovat tuto vzdálenost (označme ji K), musí splňovat následující podmínky:

Věta 4.1. 1. Průnik K s libovolnou stěnou je úsečka, bod nebo prázdná množina.

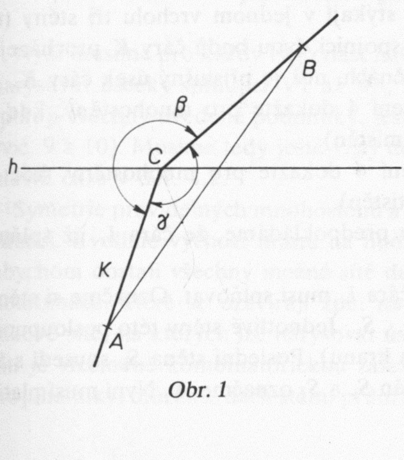
2. Úseky čáry K ležící na dvou sousedních stěnách svírají vždy s jejich společnou hranou stejný úhel.

3. Čára K obsahuje vrchol jen v případě, je-li vrcholem jeden z daných bodů A, B.

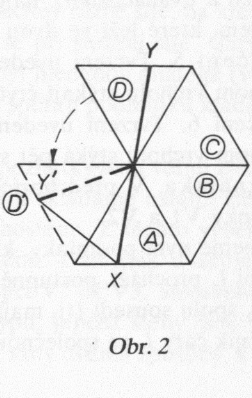
Důkaz. 1. Případ, kdy průnikem je bod nebo prázdná množina, je triviální. Nechť průnik čáry K s danou stěnou není úsečka. Potom zvolíme na tomto průniku body A, B tak, aby úsečka AB nebyla jeho částí. Protože úsečka AB je nejkratší spojnicí obou bodů, je úsek čáry K mezi nimi nutně delší a nemůže tedy realizovat nejkratší vzdálenost.

2. Předpokládejme, že podmínka 2 není splněna. Průsečník čáry K s hranou h označme C (viz *obr. 1*). Pro body A, B ležící na různých stěnách plyne z trojúhelníka ABC: $AC + CB > AB$, úsek čáry K mezi oběma body nemůže tedy realisovat jejich vzdálenost.

3. Zde musíme uvažovat situaci zvlášť pro jednotlivé typy mnohostěnů. Uvažujeme již jen čáry vyhovující předchozím dvěma podmínkám. Předpokládejme, že



Obr. 1



Obr. 2

žádný z daných bodů A, B není vrcholem a čára K vrchol obsahuje. U čtyřstěnu taková čára zřejmě nemůže existovat.

U dalších dvou těles, šestistěnu a dvanáctistěnu, kde se stýkají v jednom vrcholu tři stěny, zvolíme body A, B v různých stěnách. Protože každé dvě z těchto tří stěn mají společnou hranu, lze spojit oba body přes tuto hranu kratší spojnicí, než je daný úsek čáry K. U osmistěnu a dvacetistěnu, kde se stýkají čtyři a pět stěn v jednom vrcholu, může čára K procházející vrcholem jít z pevně zvolené stěny A pouze na stěnu D (viz *obr. 2*). Vhodným překlopením stěny D dostáváme opět kratší spojnici dvou bodů X, Y zvolených libovolně v různých stěnách na čáře K, než je délka příslušného úseku této čáry.

5. Základní vlastnosti hlavních čar

Věta 5.1. Hlavní čára L musí mít vlastnosti V1 až V3:

V1. Průnik s libovolnou stěnou mnohostěnu je prázdný nebo úsečka (t.j. prochází-li L danou stěnou, protíná ji v úsečce).

V2. Rozvineme-li dvě sousední stěny do roviny, protíná L jejich společnou hranu h jako úsečka. Všechny další rovnoběžné hrany protíná pod stejným úhlem.

V3. Čára L neprochází žádným vrcholem.

Cvičení 1. Dokažte, že pro libovolnou čáru, jejíž průnik se stěnou mnohostěnu není úsečka, lze najít vždy dva její body, jejichž vzdálenost bude kratší než příslušný úsek uvažované čáry.

Cvičení 2. Proveďte důkaz V2 analogicky jako důkaz podmínky 2 věty 4.1.

Cvičení 3. Dokažte, že na libovolné síti čtyřstenu neexistuje žádná uzavřená čára procházející vrcholem a splňující V1 a V2. Proveďte pro všechna možná rozvinutí sítě čtyřstěnu.

Cvičení 4. Pro mnohostěny, kde se stýkají v jednom vrcholu tři stěny (t.j. šestistěn a dvanáctistěn), najděte kratší spojnici dvou bodů čáry K procházející vrcholem, které leží ve dvou různých stěnách, než je příslušný úsek čáry K.

Cvičení 5. Tvrzení uvedené ve cvičení 4 dokažte pro mnohostěny, kde se v jednom vrcholu stýkají čtyři stěny (osmistěn).

Cvičení 6. Tvrzení uvedené ve cvičení 4 dokažte pro mnohostěny, kde se v jednom vrcholu stýká pět stěn (dvacetistěn).

Poznámka. V předchozích cvičeních předpokládáme, že čára L již splňuje podmínky V1 a V2.

Shrneme nyní podmínky, které daná čára L musí splňovat. Označme si stěny, kterými L prochází, postupně $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Jednotlivé stěny této posloupnosti S_i, S_{i+1} spolu sousedí (tj. mají společnou hranu). Poslední stěna S_k sousedí s S_1. Průsečník čáry L se společnou hranou stěn S_k a S_1 označme A. Nyní musí platit:

Rozvineme-li posloupnost těchto stěn do roviny, hlavní čára L na tomto rozvinutí musí být úsečkou, která vychází z $A \in S_1$ a končí v $A' \in S_k$. Body A, A' na povrchu mnohostěnu při složení sítě splynou. Úsečka AA' nesmí procházet žádným vrcholem a protíná všechny rovnoběžné hrany pod stejným úhlem.

Je zřejmé, že jen čáry tohoto typu splňují podmínky V1 až V3 a naopak, existuje-li hlavní čára L, která má tyto vlastnosti, existuje také taková mnohostěnová síť, na níž L probíhá jako úsečka.

V následujících cvičeních si ukážeme, že existují uzavřené lomené čáry splňující jen některé z podnímek V1 až V3.

Cvičení 7. Najděte vhodné sítě krychle a na nich uzavřenou lomenou čáru, která splňuje podmínky V1 a V2 a nevyhovuje podmínce V3.

Cvičení 8. Obdobně najděte uzavřené lomené čáry nesplňující jednu z podmínek V1 a V2.

Cvičení 9. Najděte na krychli alespoň jednu uzavřenou lomenou čáru splňující podmínky V1 až V3, která nebude hlavní čárou.

Poznámka. Jak se později ukáže, existují na krychli tři typy těchto čar.

Cvičení 10. Najděte uzavřené lomené čáry nesplňující vždy jednu z podmínek V1 až V3 na síti osmistěnu.

Cvičení 11. Analogicky jako ve cvičení 9 najděte uzavřenou lomenou čáru splňující V1 až V3 na osmistěnu, která nebude hlavní čárou.

Poznámka. Budou existovat dva typy těchto čar.

Cvičení 12. Pokuste sa najít některou z uvedených čar na síti dvanáctistěnu, případně dvacetistěnu.

6. Postup při určení jednotlivých hlavních čar L

Nyní musíme pro každý typ zvlášť nalézt vždy všechny různé sítě, na kterých lze narýsovat úsečky splňující V1 až V3, uzavírající se při složení sítě. Čáry, které splňují všechny uvedené podmínky, ještě nemusí být hledanou analogií (viz např. cvič. 9 a 10). Musíme tedy ještě vždy dokázat, zda splňují podmínku kladenou na hlavní čáru v def. 4.2.

Symetrie pravidelných mnohostěnů a předchozí poznatky nám veľmi zjednoduší situaci. Zvolíme výchozí hranu na libovolné stěně a skládáme ostatní stěny tak, abychom dostali všechny možné sítě daného mnohostěnu. Z těchto vybereme ty kombinace, které se uzavírají zpět na výchozí stěnu. Dále pak uvažujeme jen takové sítě, na kterých lze narýsovat úsečky splňující V1 až V3. Sestavení těchto sítí je víceméně kombinatorickou záležitostí. U typů, jejichž stěny jsou tvořeny trojuhelníky, můžeme další stěnu přiložit k výchozí vždy dvěma způsoby, k ní další opět dvěma způsoby atd. Celkový počet takto vzniklých kombinací bude $k = \underbrace{2.2.\ldots.2}_{n-1} = 2^{n-1}$. Obecně bude počet takovýchto kombinací

$$k = (h-1)^{n-1}$$

kde n je počet stěn a h je počet hran jedné stěny.

Poznámka. V tomto počtu jsou zahrnuty všechny možné kombinace, které můžeme v rovině uvedeným skládáním dostat, t. j. i ty, které vůbec netvoří síť mnohostěnu. Na druhé straně však tento postup zachycuje jen ty sítě, které sledují některou čáru L. Tato metoda je použitelná u čtyřstěnu, šestistěnu a osmistěnu, naprosto s ní však nevystačíme u dvacetistěnu, kde je přibližně 524 000 možností a u dvanáctistěnu, kde je těchto možností přes 4 000 000.

Uvažujme nyní situaci pro jednotlivá tělesa.

7. Pravidelný čtyřstěn

Aplikujeme nyní postup naznačený v předchozím odstavci. Zvolme výchozí stěnu — označme ji ABC. Vyjděme např. z hrany AB; zřejmě stačí, budeme-li uvažovat čáry procházející pravou hranou, tj. BC. Ostatní čáry dostaneme záměnou výchozí hrany a otočením čtyřstěnu. Dostáváme nyní tyto čtyři možnosti:

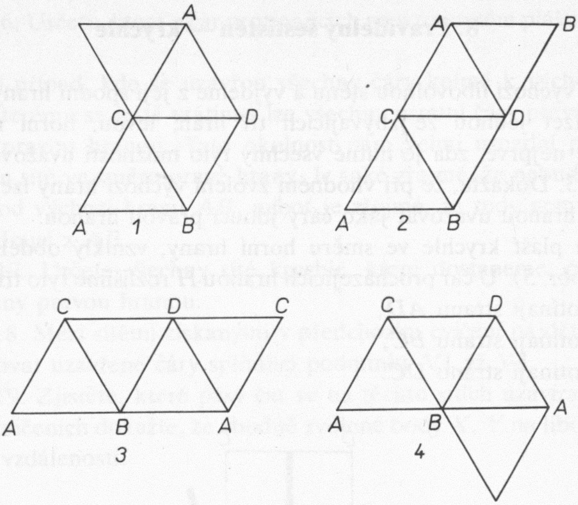
Kombinace 1 a 4 netvoří síť čtyřstěnu, u možnosti 3, jak je zřejmé z *obr. 3*, se žádná z úseček vycházejících z hrany AB neuzavře při složení sítě. Zbývá tedy možnost 2, kde se uzavřou všechny úsečky rovnoběžné s hranou AC (resp. BD). Dokážeme, že žádná z těchto čar nemá hledané vlastnosti.

Nechť L je libovolná úsečka rovnoběžná s hranou AC (viz *obr. 4*). Průsečníky této čáry s výškou na hranu BD v trojúhelníku BDC a ADB označme X a Y. Uvažujme nyní čáry, které jsou blíž hraně BD (včetně čáry procházející středem hrany AB). Vzdálenost bodů X, Y na čáře L bude rovna a (a je délka hrany čtyřstěnu). Spojíme-li body X a Y na čtyřstěnu přes hranu BD, dostáváme:

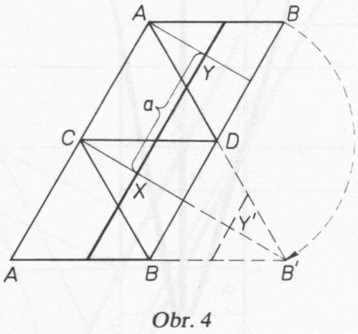
$$XY' \leqq 2 \cdot \frac{V}{2} = v = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a < a$$

kde v je výška trojúhelníka tvořícího stěnu.

Pro čáry bližší hraně AC provedeme tuto konstrukci analogicky sklopením trojúhelníka ACD. Za X a Y zvolíme průsečníky L s výškami v trojúhelnících ABC a ACD.



Obr. 3



Obr. 4

Vzdálenost bodů na čtyřstěnu je tedy menší než úsek XY na čáře L. Žádná z těchto čar tedy nebude hlavní čarou. Shrneme-li úvahu této části, platí:

Věta 7.1. Na čtyřstěnu neexistuje žádná hlavní čára.

V následujících odstavcích si čtenáři sami ověří postup ukázaný v odstavcích 7 a 6. Problémy jsou zadány ve cvičeních, která na sebe úzce navazují. Bude vhodné, zkusí-li si čtenář některou síť vystřihnout a uvědomí si, jak vypadá situace při jejím složení v prostoru.

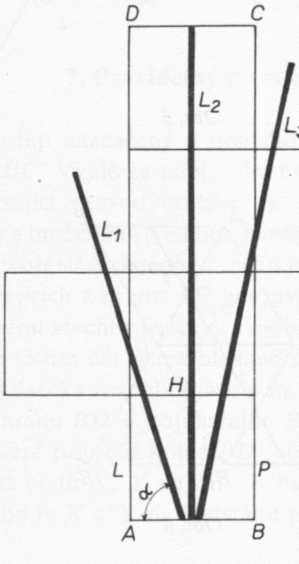
8. Pravidelný šestistěn — krychle

Zvolme za výchozí libovolnou stěnu a vyjdeme z její spodní hrany AB. Čára L může procházet jednou ze zbývajících tří hran, levou, horní nebo pravou. Podívejme se nejprve, zda je nutné všechny tyto možnosti uvažovat.

Cvičení 13. Dokažte, že při vhodném zvolení výchozí hrany lze všechny čáry jdoucí levou hranou uvažovat jako čáry jdoucí pravou hranou.

Rozvineme plášť krychle ve směru horní hrany, vzniklý obdélník označíme $ABCD$ (viz. *obr. 5*). U čar procházejících hranou H rozlišíme tyto tři případy:

— čáry protínají stranu AD,
— čáry protínají stranu BC,
— čáry protínají stranu DC.



Obr. 5

Dokažte, že vhodnou záměnou výchozí stěny a hrany lze převést na čáry procházející hranou P.

Cvičení 14. Všechny čáry protínající stranu AD (t.j. kde je $\alpha < 90°$).

Cvičení 15. Všechny čáry protínající stranu BC (mimo čáry, které již hranou P v tomto případě prochází).

Cvičení 16. Určete, které z čar protínajících na rozvinutém plášti stranu DC se uzavírají.

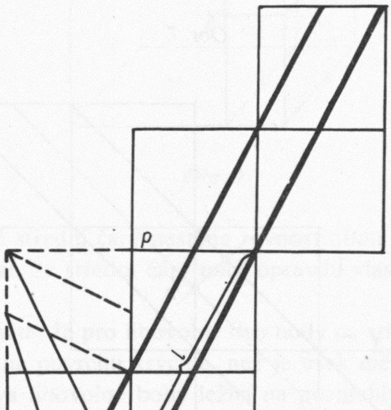
Mimo třetí případ, kde se uzavřou všechny čáry kolmé k výchozí hraně, t.j. $\alpha = 90°$, ke kterému se ještě vrátíme, lze všechny ostatní čáry převést na případy procházející pravou hranou. Tato okolnost nám velmi usnadní práci, budeme sestavovat jen sítě ve směru pravé hrany. Je také zřejmé, že nebudeme uvažovat sítě jdoucí pod výchozí hranu AB, neboť je zřejmé, že tudy nemůže procházet žádná čára jdoucí z AB.

Cvičení 17. Určete všechny sítě krychle, které dostaneme, postupujeme-li z výchozí stěny pravou hranou.

Cvičení 18. Mezi sítěmi získanými v předchozím cvičení najděte tři, na nichž mohou existovat uzavřené čáry splňující podmínky V1 až V3.

Cvičení 19. Zjistěte, které pásy čar se na těchto sítích uzavírají.

V dalších cvičeních dokažte, že vhodně zvolené body X, Y na libovolné čáře lze spojit kratší vzdáleností.

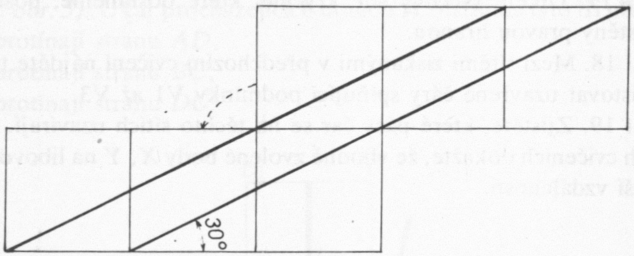


Obr. 6

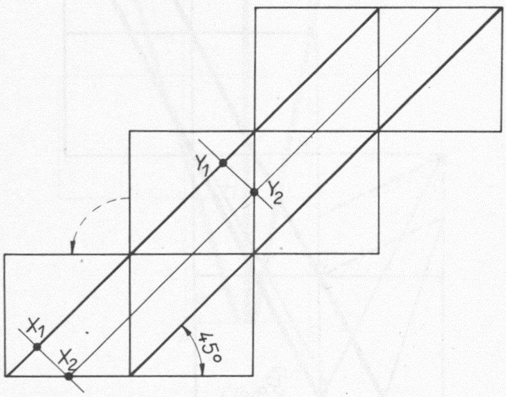
Cvičení 20. Důkaz proveďte pro čáry ležíci na síti znázorněné na *obr. 6* v pásu rovnoběžek svírajících s výchozí hranou úhel $\alpha = 60°$.

Návod. Za body X, Y zvolte průsečníky libovolné čáry z pásu s výchozí hranou a hranou p. Dokažte, že vzdálenost bodů X, Y na krychli je menší než vyznačená délka 1.

Cvičení 21. Uvažujte čáry na *obr. 7*, t. j. čáry svírající s výchozí hranou úhel $\alpha = 30°$, a dokažte, že tento případ je jen symetrickým obrazem případu předchozího. Určete, které průsečníky čar s hranami musíme zvolit za X, Y, abychom dostali situaci analogickou *obr. 6*.



Obr. 7



Obr. 8

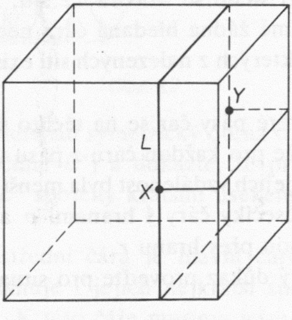
Cvičení 22. Ukažte, že pro body zvolené na čarách v horní polovině pásu rovnoběžek s úhlem $\alpha = 45°$ podle *obr. 8* lze na krychli najít kratší spojnici.

Cvičení 23. Zjistěte, které body musíme v tomto případě zvolit pro čáry z dolní poloviny pásu na *obr. 8* a proveďte důkaz jako v předchozím cvičení.

Z výsledků cvičení 20 až 23 je zřejmé, že žádná z možností v těchto cvičeních uvedených nevyhovuje požadované vlastnosti. Vzhledem k tomu, že ostatní kombinace lze do těchto případů rovněž zahrnout (viz předchozí úvahy), zbývá pouze případ čar, které svírají s výchozí hranou úhel $\alpha = 90°$ (viz L z *obr. 5*).

Cvičení 24. Dokažte, že kromě vlastní střední čáry lze pro libovolnou čáru tohoto typu zvolit dva body tak, aby jejich vzdálenost byla menší než příslušný úsek čáry L.

Návod. Za body X, Y označte středy úseček, které jsou průniky čáry L s libovolnými protilehlými stěnami a porovnejte vzdálenost těchto bodů měřenou podél L se vzdáleností měřenou přes stěnu, kterou L neprochází (viz *obr. 9*).



Obr. 9

Ukažte, že v případě střední čáry nastane rovnost obou vzdáleností.

Nyní zbývá dokázat, že střední čáry mají opravdu vlastnost požadovanou pro hledané analogie.

Cvičení 25. Dokažte, že pro libovolné dva body na střední čáře L nenajdeme kratší spojnici ležící na povrchu krychle, než je úsek měřený podél L.

Návod. Zvolte dva libovolné body ležící na protilehlých stěnách (důkaz pro body ležící na téže stěně a pro body ležící na stěnách majících společnou hranu je triviální), popište všechny typy čar ležících na povrchu krychle, kterými je možné tyto body spojit a ukažte, že všem možnostem odpovídá vzdálenost bodů větší nebo rovná $2a$.

Cvičení 26. Určete dva další symetrické obrazy této čáry L. Užijte vhodného označení a popište, přes které stěny se tyto čáry uzavírají.

Získané poznatky shrneme v následující větě:

Věta 8.1. Na krychli existují pouze tři hlavní čáry (hledané analogie hlavních kružnic). Tyto čáry jsou průniky středních řezů s povrchem krychle.

9. Pravidelný osmistěn

Obdobně jako u krychle zvolme libovolnou stěnu za počáteční a vyjděme z její spodní hrany.

Cvičení 27. Dokažte, že stačí uvažovat čáry jdoucí pravou hranou (analogicky jako ve cvičení 13).

Cvičení 28. Určete všechny sítě, které dostaneme při rozvíjení přes tuto hranu.

Poznámka. Uzavře-li se některá síť zpět na výchozí stěnu, pak všechny sítě, které dostaneme různým skládáním zbývajících stěn, považujeme za jeden případ.

Cvičení 29. Mezi sítěmi získanými v předchozím cvičení najděte sedm takových, které sa uzavírají zpět na výchozí hranu počáteční stěny.

Poznámka. Na výchozí stěnu se uzavírá 12 sítí, z nichž pět sa uzavírá přes levou hranu. Na nich zřejmě žádná hledaná čára neexistuje.

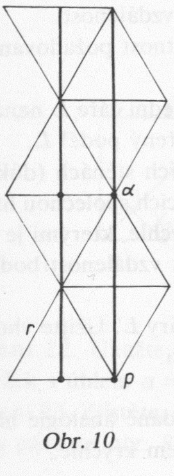
Cvičení 30. Zjistěte, na kterých z nalezených sítí existují uzavřené čáry splňující podmínky V1 až V3.

Cvičení 31. Určete, které pásy čar se na těchto sítích uzavírají.

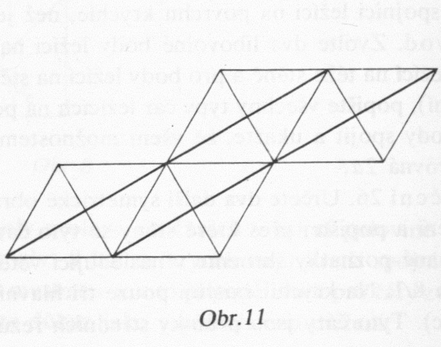
Cvičení 32. Dokažte, že pro každou čáru z pásu vyznačeného na *obr. 10* lze najít dvojici bodů tak, aby jejich vzdálenost byla menší než příslušný úsek čáry.

Poznámka. Zvolte průsečíky čáry s hranami p a q a porovnejte úsek čáry s jejich vzdáleností měřenou přes hranu r.

Cvičení 33. Analogický důkaz proveďte pro situaci na *obr. 11*. Zvolte sami vhodné dvojice bodů.

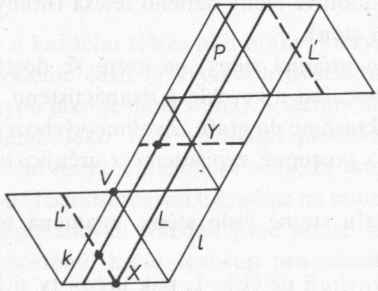


Obr. 10



Obr. 11

Cvičení 34. Dokažte, že žádná z pásu rovnoběžných čar na *obr. 12* s výjimkou střední čáry nemá vlastnosti hlavní čáry.



Obr. 12

Návod. Doplňte na rozvinuté síti symetrický obraz střední čáry L jdoucí levou hranou výchozí stěny (označíme L') a dokažte, že průsečíky libovolné čáry P s touto čarou jsou pomocí L' spojeny kratším úsekem. U střední čáry nastává rovnost.

Nyní zbývá dokázat, že střední čára je hlavní čarou na osmistěnu, t.j. že s každými dvěma body obsahuje i jejich nejkratší spojnici. Důkaz se povede obdobně jako ve cvičení 25. K této čáře musíme ještě najít všechny symetrie.

Cvičení 25. Určete délku spojnic protilehlých bodů X, Y vedených přes hrany k a 1 a přes vrchol V na osmistěnu (podle *obr. 12*). Dokažte, že tyto úsečky jsou delší než $(3/2a)$ (případně rovny), kde a je hrana osmistěnu ($\frac{3}{2}a$ je vzdálenost XY, což je polovina délky L).

Cvičení 36. Určete tři další symetrické obrazy této čáry, označte vhodným způsobem stěny a popište, přes které stěny se čáry uzavírají.

Shrnutím výsledků cvičení dostáváme analogické tvrzení jako v případě krychle:

Věta 9.1. Na povrchu osmistěnu existují čtyři hlavní čáry. Uzavírají se přes šest stěn a půlí všechny hrany, kterými procházejí.

10. Určení hlavních čar na dvanáctistěnu a dvacetistěnu

Nyní zbývají dva poslední pravidelné mnohostěny. Bylo již řečeno, že na tato tělesa není možné aplikovat dosavadní postup. Nebudeme zde podrobně uvádět popis metody, která nám umožní určit ty sítě, na kterých budou existovat uzavřené čáry splňující dané podmínky. Ukážeme jen její hlavní myšlenku (podrobnou konstrukci a příklady použití uvedeme případně v dalším pokračování článku). Při této metodě postupujeme takto:

1. Označíme čísly jednotlivé stěny daného tělesa (hrany jsou pak určeny vždy dvěma čísly sousedních stěn).

2. Sestavíme tabulku určující stěny, na které se dostáváme levou a pravou hranou, příp. horní a bočními u krychle a dvanáctistěnu.

3. Sestavování sítí zakreslíme do grafu. Zvolíme výchozí stěnu (můžeme ji zvolit tak, aby měla číslo 1) a postupně vypisujeme z určující tabulky větvení na další stěny.

4. Objeví-li se v grafu stejné číslo stěny, znamená to, že se na této stěně příslušná větev uzavírá.

5. Větve, které se uzavírají na čísle 1, pak určují ty sítě, které sa uzavírají na výchozí stěnu. Na výchozí hranu se uzavírají v grafu právě ty větve, kde před číslem 1 předchází číslo stěny sousedící se stěnou počáteční přes výchozí hranu.

Tímto způsobem máme určeny ty sítě, na kterých mohou existovat uzavřené čáry L. Uvedené metody nám velmi usnadní práci u krychle a osmistěnu. U dvou zbývajících mnohostěnů se grafy po několika krocích značně rozvětví. Bylo proto nutné najít některá omezení, která vedou k rychlejšímu ukončení uvedeného postupu. Těmito omezeními se již nyní nebudeme zabývat, závěrem pouze shrneme získané poznatky.

11. Závěr

Nejprve uveďme, kolik hlavních čar na příslušných mnohostěnech existuje a jaké jsou některé jejich společné vlastnosti.

Počet hlavních čar na pravidelném n-stěnu (mimo čtyřstěn, kde žádná neexistuje — viz článek 7) můžeme vyjádřit vztahem

$$x = \frac{s_n n}{p}$$

kde s_n je počet středových příček stěny, t.j. spojnic středů stran v případě trojúhelníka a spojnic středů stran, které nejsou sousední, v případě čtverce a pětiúhelníka. Tento počet pro jednotlivé n-stěny je roven: $s_6 = 2$, $s_8 = s_{20} = 3$, $s_{12} = 5$. Číslo n určuje počet stěn a p je počet stěn, přes které se uzavírá čára L.

Krychle: $p = 4$, $x = 3$

Osmistěn:	$p=6$,	$x=4$
Dvanáctistěn:	$p=6$,	$x=10$
Dvacetistěn:	$p=10$,	$x=6$

Všechny hlavní čáry u každého tělesa půlí hrany, kterými procházejí, rozdělují všechny stěny na pravidelné části (s výjimkou dvanáctistěnu dokonce na čtyři shodné části stejného typu jako je daná stěna). Všechny hlavní čáry na příslušných mnohostěnech dostaneme jako řezy rovinami procházejícími středem tělesa a středy hran (tzv. střední řezy). Ukazuje se tedy, že tyto hlavní čáry mají další, někdy velmi podstatnou vlastnost hlavních kružnic na kouli, kterou jsme v původní formulaci problému nepožadovali (hledali jsme pouze takové uzavřené lomené čáry na povrchu mnohostěnů, které realisují pro všechny body na nich ležící nejkratší vzdálenost.

Zformulujme nyní uvedené poznatky do závěrečné věty:

Věta 11.1 Hlavní čáry na pravidelných mnohostěnech jsou tvořeny právě středními řezy těchto těles.

Poznámka. Obecná metoda pro nalezení hlavních čar i na složitějších tělesech zde byla popsána velmi stručně. Její podrobný rozbor, který by značně přesáhl rámec tohoto článku, je uveden v práci [5]. Pro zájemce jsou v této práci na závěr uvedeny rovněž některé problémy pro samostanou práci.

Rád bych poděkoval doc. RNDr. MILANU SEKANINOVI, CSc. za námět pro tento článek, za stálý zájem v průběhu práce a za řadu cenných rad a připomínek týkajících se obsahové i formální stránky článku.

Literatura

[1] Sekanina, M.: Základní pojmy z geometrie. Učebnice pro 1. ročník gymnasií se zaměřením na matematiku. SPN, Praha 1974.
[2] Grünbaum, B.: Convex polytopes. Wiley, London, New York, Sydney 1968.
[3] Alexandrov, A. A.: Vnutrennaja geometrija vypuklych poverchnostej. Ogiz, Moskva, Leningrad 1948.
[4] Sekanina, M.—Sekaninová, A.: Mnohostěny. Skripta UJEP, Brno 1973.
[5] Musil, J.: Hlavní čáry na pravidelných mnohostěnech. Folia facultatis Sci. Nat. Universitatis Purkynianae Brunensis, XVII, 1976.
[6] Parchomenko, V.: Čto takoje linija. Moskva 1954.