ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Vojtech Filo, Piešťany, Lúčna 14, úlohy spolu s riešeniami prosíme posielať na jeho adresu.

Úloha A 5 (autor P. Bartoš).

Dokážte, že pre $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin^3\alpha} + \frac{1}{\cos^3\alpha}\right) \geqq 2^4$$

a rovnosť platí len vtedy, keď $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Dôkaz: Podľa vety 1 a 2

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin^3\alpha} + \frac{1}{\cos^3\alpha}\right) \geqq 4\sqrt{\frac{1}{\sin^4\alpha\cos^4\alpha}}$$

$\left(\text{rovnosť pri } \sin\alpha = \cos\alpha,\ \alpha = \frac{\pi}{4}\right)$,

$(\sin\alpha + \cos\alpha)^4 \geqq 2^4\sqrt{(\sin\alpha\cos\alpha)^4}$ $\left(\text{rovnosť pri } \sin\alpha = \cos\alpha,\ \alpha = \frac{\pi}{4}\right)$,

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin^3\alpha} + \frac{1}{\cos^3\alpha}\right) \geqq 2^6\frac{1}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^4}.$$

Avšak $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = \sqrt{1 + \sin 2\alpha} \leqq \sqrt{2}$ $\left(\text{rovnosť pri } \alpha = \frac{\pi}{4}\right)$, a teda $\frac{1}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^4} \geqq \frac{1}{2^2}$. Podľa vety 2 potom (po vynásobení $(\sin\alpha + \cos\alpha)^4$) máme dokázanú nerovnosť s podmienkou rovnosti $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Poznámka: V dnešných úlohách sa všade odvolávame na vety z práce P. Bartoša: *Niektoré hľadiská výberu matematických úloh pre prácu v žiackych krúžkoch*, uverejnenú v Matematických obzoroch, zv. 2, str. 51—56.

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdots\left(\frac{1}{\sin^n\alpha} + \frac{1}{\cos^n\alpha}\right)$$

v čísle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ minimum, ktoré je $2^{\frac{n^2+5n}{4}}$.

Poznámka 5,2. Pomocou vety 1 možno nerovnosť doplniť takto:

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin^3\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos^3\alpha}\right) \geqq$$

$$\geqq 2\sqrt{\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin^3\alpha} + \frac{1}{\cos^3\alpha}\right)} \geqq 2^3.$$

Poznámka 5,3. Nerovnosť možno pomocou vety 3 zovšeobecniť pre viac než dvoch sčítancov v jednotlivých zátvorkách a doplniť na ľavej strane tak, ako je uvedené v poznámke 5,2.

Úloha A 6 (autor P. Bartoš).

Nech $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Dokážte, že

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\sin^{\sqrt{3}}\alpha} + \frac{1}{\cos^{\sqrt{2}}\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin^{\sqrt{2}}\alpha} + \frac{1}{\cos^{\sqrt{3}}\alpha}\right) > 2^{2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}}$$

pričom rovnosť nastať nemôže.

Podľa vety 1 a 2

$$f(\alpha)\,.\,(\sin\alpha + \cos\alpha)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{\sin^{\sqrt{3}}\alpha\cos^{\sqrt{2}}\alpha}}\,.\,2\sqrt{\frac{1}{\sin^{\sqrt{2}}\alpha\cos^{\sqrt{3}}\alpha}}\,.$$

$$.\,2^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\sqrt{(\sin\alpha\cos\alpha)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$$

a teda
$$f(\alpha) \geqq \frac{2^{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} \tag{1}$$

Avšak $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{1 + \sin 2\alpha} \leqq \sqrt{2}$ $\left(\text{rovnosť pri } \alpha = \frac{\pi}{4}\right)$, a teda

$$2^{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}} \geqq (\sin\alpha + \cos\alpha)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \tag{2}$$

Poznámka 5,1. Obdobne možno riešiť rozmanité úlohy tohto typu, napr.: Dokážte, že pre $0 < \alpha < \pi/2$ má funkcia

Podľa vety 2 znásobením nerovností (1) a (2) máme

$$f(\alpha) \cdot 2^{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}} \geqq 2^{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

odkiaľ $f(\alpha) \geqq 2^{2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}}$.

Rovnosť by mohla platiť len pri $\alpha = \frac{\pi}{4}$, avšak

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = [(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} + (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]\,[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2})^{\sqrt{3}}] = 2^{\sqrt{2}} + 2 \cdot 2^{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}} +$$

$$+ 2^{\sqrt{3}} = (2^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{3}}) + 2^{1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}} > 2\sqrt{2^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}} + 2^{1+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}}$$

podľa vety 1 rovnosť platiť nemôže, lebo $2^{\sqrt{2}} \neq 2^{\sqrt{3}}$. Odtiaľ ďalej

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 2^{1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}} + 2^{1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}} = 2^{2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}}$$

čiže rovnosť nastať nemôže, čo bolo treba dokázať.