O SUMOVANÍ POSTUPNOSTÍ A RADOV

JAROSLAV ČERVEŇANSKÝ, Bratislava

V tejto poznámke informatívnym spôsobom zhrnieme niektoré poznatky, týkajúce sa zovšeobecnenej konvergencie postupností a radov. Problematika konvergentných postupností a radov nebude teraz predmetom nášho záujmu. Predpokladáme, že tá je zo základného kurzu matematiky známa každému čitateľovi. Preto pojmy „postupnosť konverguje", „rad konverguje", resp. „rad má konečný súčet" tu na tomto mieste nebudeme objasňovať. Nás budú viacej zaujímať divergentné postupnosti a rady. Za konvergentnú postupnosť budeme v celej poznámke považovať postupnosť, ktorá má konečnú limitu.

Uvažujme o postupnosti

$$\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\} \tag{1}$$

Zrejme je táto postupnosť divergentná. Priraďme tejto postupnosti novú postupnosť, a to nasledujúcim spôsobom: k-ty člen novej postupnosti sa bude rovnať súčtu prvých k-členov pôvodnej postupnosti, vydelenému číslom k. Touto metódou dostávame z pôvodnej postupnosti (1) postupnosť

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \ldots\right\} \tag{2}$$

Ľahko sa dá nahliadnuť, že táto postupnosť má limitu rovnajúcu sa $\frac{1}{2}$. Stojí za povšimnutie, že nová postupnosť konverguje práve k aritmetickému priemeru čísel 0 a 1, čo sú vlastne hodnoty členov pôvodnej postupnosti.

Teraz si popíšeme priradenie postupnosti (2) k postupnosti (1) zo všeobecnejšieho zorného uhla.

Nech $A = (a_{nk})$ je nejaká číselná matica a

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{3}$$

je ľubovoľná číselná postupnosť. Potom zostrojme postupnosť

$$\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$$
$$\text{kde } t_m = \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} s_k \tag{4}$$

pričom predpokladáme, že pre $m = 1, 2, \ldots$ rady vpravo v (4) konvergujú. Postupnosť $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ voláme A-transformáciou postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ak teda špeciálne volíme za $A_0 = (a_{nk})$, $a_{nk} = \frac{1}{n}$, pre $k \leqq n$ a $a_{nk} = 0$, pre $k > n$, maticu aritmetických stredov, tak A_0-transformácia postupnosti (1) je postupnosť (2). Ak všeobecne postupnosť (4) konverguje a má limitu rovnajúcu sa hodnote t, potom hovoríme, že postupnosť (3) je sumovateľná maticou A k limite t a píšeme $A\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} s_n = t$.

Zatiaľ sme si všímali problematiku sumovateľnosti postupností. Úplne obdobná situácia je i pri radoch. Veď vyšetrovať konvergenciu radu znamená vyšetrovať konvergenciu k nemu prislúchajúcej postupnosti čiastočných súčtov.

Príklad. Uvažujme o rade $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$. Je známe, že tento rad nekonverguje, lebo k nemu prislúchajúca postupnosť čiastočných súčtov je postupnosť $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$, čo je postupnosť (1), ktorá je divergentná. Ako sme si však vyššie ukázali, možno ju maticou aritmetických stredov A_0 transformovať do konvergentnej postupnosti (2).

Videli sme, že A_0-transformácia divergentnej postupnosti môže byť konvergentná postupnosť. Ale matica A_0 má ešte aj inú, nemenej dôležitú vlastnosť, a to takú, že každú konvergentnú postupnosť transformuje opäť do konvergentnej, majúcej tú istú limitu ako postupnosť pôvodná. Posledné tvrdenie si dokážeme:

Uvažujme o ľubovoľnej konvergentnej postupnosti $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme: $d = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$; $h_i = d_i - d$ $(i = 1, 2, \ldots)$ a b_n nech je postupnosť, získaná A_0-transformáciou postupnosti $\{d_n\}$. Teda

$$b_n = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n}$$

Našim cieľom je ukázať, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = d$. Ale to platí práve vtedy, keď k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje N také, že pre všetky $n > N$ platí $|b_n - d| < \varepsilon$. Počítajme

$$|b_n - d| = \left|\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n} - d\right| = \left|\frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}{n}\right| \leqq$$

$$\leqq \left|\frac{h_1}{n}\right| + \left|\frac{h_2}{n}\right| + \ldots + \left|\frac{h_n}{n}\right|$$

Všimnime si posledný súčet. Z definície hodnôt h_i (pre $i = 1, 2, \ldots$) je zrejmé, že $\lim\limits_{i\to\infty} h_i = 0$, teda existuje n' také, že pre všetky $n > n'$ je $|h_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, ale tiež existuje n'' tak, že pre všetky $n > n''$ je $\frac{1}{n}(|h_1| + |h_2| + \ldots + |h_{n'-1}|) < \frac{\varepsilon}{2}$. Teraz stačí brať $N = \max\{n', n''\}$. Potom pre $n > N$ platí

$$\left|\frac{h_1}{n}\right| + \left|\frac{h_2}{n}\right| + \ldots + \left|\frac{h_{n'-1}}{n}\right| + \left|\frac{h_{n'}}{n}\right| + \ldots + \left|\frac{h_n}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

a tak $|b_n - d| < \varepsilon$ pre $n > N$.

Tým je naše tvrdenie dokázané.

Transformácie, ktoré zachovávajú nielen konvergenciu, ale i hodnotu limity pôvodnej postupnosti, nazývame regulárnymi transformáciami.

Regulárnosť matice možno charakterizovať nasledujúcim spôsobom:

Veta. Nech $\{z_n\}$ je ľubovoľná konvergentná postupnosť, konvergujúca k hodnote z. Potom postupnosť

$$z'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k$$

konverguje k z pre $n \to \infty$ práve vtedy, keď platí

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < M$, pre všetky $n = 1, 2, \ldots$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$, pre ľubovoľné pevné k,
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = A_n \to 1$, pre $n \to \infty$.

Dôkaz tejto vety je pomerne dlhý, preto ho neuvedieme. Možno ho nájsť v [1], str. 79.

Teraz si ukážeme, že matica aritmetických stredov A_0 je regulárna. Všimnime si túto maticu. Vieme už, že $a_{nk} = \frac{1}{n}$, pre $n \geqq k$ a $a_{nk} = 0$, pre $n < k$. Počítajme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n\text{-krát}} = \frac{n}{n} = 1$$

čím sú vlastnosti (1) a (3) overené. Podobne

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

čím je overená i vlastnosť 2, teda A_0 je regulárnou maticou.

Ďalším príkladom regulárnej matice je tzv. Borelova matica. Jej prvky sú definované nasledovne

$$a_{nk} = \frac{e^{-n}n^k}{k!}$$

Počítajme

$$\sum_{k=0}^{\infty} | a_{nk} | = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-n}n^k}{k!} = e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = 1$$

Tento výsledok ukazuje, že Borelova matica spĺňa predpoklady 1 a 3 našej vety. Ale keďže pre ľubovoľné k tiež platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}n^k}{k!} = 0$$

je zrejmá i platnosť podmienky 2, teda Borelova matica je regulárnou maticou.

Vieme už, že transformáciou konvergentnej postupnosti regulárnou maticou dostávame opäť konvergentnú postupnosť. Ale existuje matica, ktorá nie je regulárna, ale transformuje každú konvergentnú postupnosť opäť do konvergentnej postupnosti.

Príklad. Uvažujme maticu $A_1 = (a_{nk})$, ktorej prvky sú dané nasledovne $a_{n\,n-1} = -1$, $a_{nn} = 1$ a $a_{nk} = 0$, pre všetky ostatné k. Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná konvergentná postupnosť. Potom A_1-transformáciou postupnosti $\{s_n\}$ dostávame postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $z_n = s_n - s_{n-1}$, pre $n = 2, 3, \ldots$ Keďže postupnosť $\{s_n\}$ je konvergentná, zrejme platí

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0$$

teda postupnosť $\{z_n\}$ je tiež konvergentná. Matica A_1 však nie je regulárnou, lebo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = 0$$

pre všetky n, čo je v spore s vlastnosťou (3) regulárnych matíc.

Poznámka. Regulárne matice, t. j. matice spĺňajúce podmienky 1 až 3, sa tiež nazývajú T-maticami.

Uvažujme iba ohraničené postupnosti a zaveďme si nasledovné označenia: C — nech je množina všetkých konvergentných postupností, $S = S(T)$ — množina všetkých ohraničených postupností, sumovateľných regulárnou maticou T a M — množina všetkých ohraničených postupností. Treba si uvedomiť, že množina $S = S(T)$ môže byť vo všeobecnosti pre dve rôzne T-matice rôzna.

Poznámka. Nech $u = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $v = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú ľubovoľné prvky z $S(T)$ a nech c je ľubovoľné reálne číslo. Zaveďme si nasledujúce operácie:

$$u + v = \{u_n v_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ a } c \,.\, u = \{cu_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Ľahko sa dá nahliadnuť, že množina $S(T)$ s takto definovanými operáciami tvorí vektorový priestor nad telesom reálnych čísel. K tomu zrejme stačí ukázať, že ak $u \in S(T)$, $v \in S(T)$ (t. j. ak existuje T-lim u a T-lim v) a c je reálne číslo, tak $(u + v) \in S(T)$ a $(c \,.\, u) \in S(T)$ [t. j. existuje T-lim $(u + v)$ a T-lim $(c \,.\, u)$]. Počítajme

$$T\text{-}\lim_{n\to\infty} (u_n v_n) = T\text{-}\lim_{n\to\infty} u_n + T\text{-}\lim_{n\to\infty} v_n \,.$$

Podľa predpokladu obe T-limity vpravo existujú, teda existuje i T-limita vľavo. Z tých istých dôvodov existuje aj

$$T\text{-}\lim_{n\to\infty} cu_n = cT\text{-}\lim_{n\to\infty} u_n$$

teda $S(T)$ tvorí vektorový priestor.

Podobnou úvahou možno ukázať, že aj množina C tvorí vektorový priestor, ktorý je vektorovým podpriestorom každého $S(T)$, kde T je ľubovoľná regulárna matica.

Vzhľadom na uvedené označenie zrejme platí inklúzia $C \subset S \subset M$. Dá sa ukázať, že existujú T-matice, pre ktoré je $C = S$. Stačí vziať napríklad jednotkovú maticu $E = (a_{nk})$, $a_{nk} = 1$ ak $n = k$ a $a_{nk} = 0$ vo všetkých ostatných prípadoch. Ľahko sa nahliadne, že matica E transformuje každú postupnosť do tej istej postupnosti. Teda nejaká postupnosť má E-limitu práve vtedy, keď je konvergentná. Teda v tomto prípade je $C = S$.

Prirodzene sa naskytá otázka, či existuje regulárna matica T taká, aby $S(T) = M$, t. j. či existuje T-matica, ktorá by transformovala každú ohraničenú postupnosť do postupnosti konvergentnej. Odpoveď na túto otázku je záporná. Platí totiž veta:

Veta (Steinhaus). Nech $A = (a_{nk})$ je ľubovoľná regulárna matica. Potom existuje ohraničená postupnosť s členmi iba 0 a 1, ktorá nie je sumovateľná maticou A.

Dôkaz tohto tvrdenia možno nájsť v [1], str. 93.

S otázkami sumovateľnosti nekonečných postupností úzko súvisia tzv. vety Tauberovho typu. Sú to vety, v ktorých zo sumovateľnosti postupnosti a nejakej ďalšej podmienky vyplýva konvergencia tejto postupnosti.

Pri tejto príležitosti by som chcel poukázať na jednu nepresnosť v práci Fu Cheng Hsianga [2]. Vo svojej práci vyslovuje tvrdenie:

Veta 1. Nech $\{f_n\}$ je postupnosť konečných funkcií definovaných na uzavretej množine E. Ak k ľubovoľnému $P_0 \in E$ existuje taká regulárna matica $A = (a_{nk})$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$, že každá čiastočná postupnosť $\{f_{ni}(P_0)\}$ má A-limitu, potom postupnosť $\{f_n\}$ konverguje na E k ohraničenej funkcii f.

Dá sa ukázať, že predpoklady tejto vety zaručujú bodovú konvergenciu postupnosti $\{f_n\}$ k nejakej funkcii f, ktorá je konečná na E, ale tu nemusí byť ohraničená.

Kontrapríklad. Na množine $E = \langle 0, 1 \rangle$ si definujme funkciu $\varphi(x)$ nasledovne:

$$\varphi(x) = q, \text{ ak } x = \frac{p}{q} \text{ je nenulové racionálne číslo,}$$

$$\varphi(x) = 0, \text{ ak } x = 0, \text{ alebo } x \text{ je iracionálne číslo.}$$

Teraz položme $f_n = \varphi$, pre $n = 1, 2, \ldots$ Predpoklady tvrdenia Fu Cheng Hsianga sú splnené a zrejme $\{f_n\} \to \varphi$, pre $n \to \infty$. Ale φ je na E neohraničená.

Poznámka. Ak by sme vo vete 1 predpokladali naviac rovnakú ohraničenosť funkcií f_n, t. j. existenciu čísla $C > 0$ tak, že pre všetky $P \in E$ a všetky $n = 1, 2, \ldots$ je $|f_n(P)| \leqq C$, potom bude zrejme vyššie vyslovené tvrdenie správne.

Literatúra

[1] Cooke, R. G.: Beskonečnye matricy i prostranstva posledovateľnostej. Moskva 1960.

[2] Hsiang, Fu Cheng: Tauberova veta pre postupnosť funkcií. Portug. Math., 24 (1965).