Motto: „Ak na niečo prídeme, veľmi sa divíme, že na to prišiel aj niekto iný.“

Jean Paul

ŽIAK VERSUS VYUČUJÚCI ALEBO KNIHA

ANTON HNÁTH, Michalovce

Všeobecne prijímanou, alebo aspoň proklamovanou normou vo vyučovaní matematiky (a nielen matematiky), je schopnosť pedagóga oceňovať tie myšlienky a nápady žiaka, ktoré sú jeho vlastné, t. j. vybočujú z ustálených postupov používaných v škole, nerešpektujú návody učebnice a pod. Existujú faktory, ktoré ovplyvňujú alebo nezámerne (napr. spomenuté návody v učebniciach), alebo zámerne (napr. vyučujúci, ktorý nerád sleduje myšlienkové pochody, ak sú rozdielne od tých, čo práve prebiehajú v jeho mysli) matematickú individuálnosť žiaka. Tieto vplyvy obyčajne neprospievajú žiackej vynaliezavosti a drobnej matematickej tvorivosti. V tomto príspevku chceme na niekoľkých príkladoch ukázať, že žiacke riešenie je výhodnejšie alebo aspoň rovnako dobré, ako riešenie navrhované učebnicou, príp. komentárom alebo vyučujúcim.

Príklad 1. V R riešte rovnicu s premennou x a parametrom

$$a \in R\colon |x-a|+|x+a|=2a-1 \tag{1}$$

Vyučujúci odporúča použiť metódu nulových bodov.

Postup žiaka: Pre $a \leqq 0$ je úloha neriešiteľná. Pre $a>0$ vychádzame z geometrického významu absolútnych hodnôt na ľavej strane rovnice (1) (vzdialenosť bodov x, a, resp. x, $-a$).

Pre $x \in (-\infty, -a> \cup <a, \infty)$ je $|x-a|+|x+a| \geqq 2a > 2a-1$, teda rovnica je neriešiteľná.

Pre $x \in (-a, a)$ je $|x-a|+|x+a|=2a>2a-1$, rovnica je opäť neriešiteľná.

Záver. Rovnica (1) je v R neriešiteľná pre všetky $a \in R$.

Témou ďalšej úlohy je vyšetrovanie množiny bodov danej vlastnosti metódou analytickej geometrie.

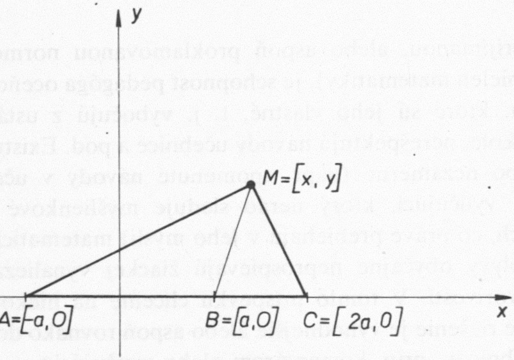
Príklad 2. Na priamke sú dané body A, B, C tak, že bod B leží medzi bodmi A, C, pričom $AB = 2BC$. Nájdite geometrické miesto bodov, z ktorých vidieť úsečky AB, BC pod rovnako veľkými uhlami.

Postup navrhovaný učebnicou sa opiera o nasledujúcu vetu:

Ak majú dve priamky smernice k_1, k_2, ich odchýlku $\alpha \neq 90°$ vypočítame podľa vzorca $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$.

Riešenie žiaka. Označme P_1 obsah trojuholníka AMB, P_2 obsah trojuholníka BMC (*obr. 1*). Zrejme platí:

$$P_1 = SP_2 \tag{2}$$



Obr. 1

Ale

$$P_1 = \frac{1}{2} AM \,.\, BM \,.\, \sin \sphericalangle AMB, \qquad P_2 = \frac{1}{2} BM \,.\, CM \,.\, \sin \sphericalangle BMC$$

keďže $\sin \sphericalangle AMB = \sin \sphericalangle BMC$, dostaneme po dosadení za P_1, P_2 do (2):

$$AM = 2CM \tag{3}$$

Každý bod M hľadanej množiny bodov bude potom v súradnicovej sústave zvolenej ako na *obr. 1* vyhovovať rovnici

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2a)^2 + y^2}$$

ktorú ľahko upravíme na tvar

$$(x-3a)^2+y^2=4a^2$$

čo je rovnica kružnice so stredom $S=[3a,\ 0]$ a polomerom $r=2a$. Obrátenie postupu je tiež jednoduché: Zo (4) vyplýva (3) a odtiaľ pre $y\neq 0$: sin $\sphericalangle\ AMB =$ $=$ sin $\sphericalangle\ BMC$, teda

buď a)

$$\sphericalangle \mathrm{AMB} = \sphericalangle \mathrm{BMC}$$

buď b)

$$\sphericalangle \mathrm{AMB} = 180° - \sphericalangle \mathrm{BMC}$$

Možnosť b) je vylúčená.

Čitateľ si môže uvedené riešenie príkladu č. 220 zo s. 130 z Matematiky pre 3. ročník SVŠ, vetva prírodovedná, porovnať s postupom riešenia v tejto učebnici.

Ďalšie dve úlohy sú z I. kola kategórie B XXV. ročníka MO.

Príklad 3. Nech a, b, c sú ľubovoľné kladné reálne čísla. Potom neexistuje trojuholník, ktorého strany by mali dĺžky $a\sqrt{c^2-b^2}$, $b\sqrt{c^2-a^2}$, c^2. Dokážte!

Komentár k riešeniu tejto úlohy, ktorý sa obyčajne zhoduje s riešením uvedeným v príslušnom zväzku úloh z MO, navrhuje dokázať nerovnosť

$$a\sqrt{c^2-b^2}+b\sqrt{c^2-a^2}\leqq c^2$$

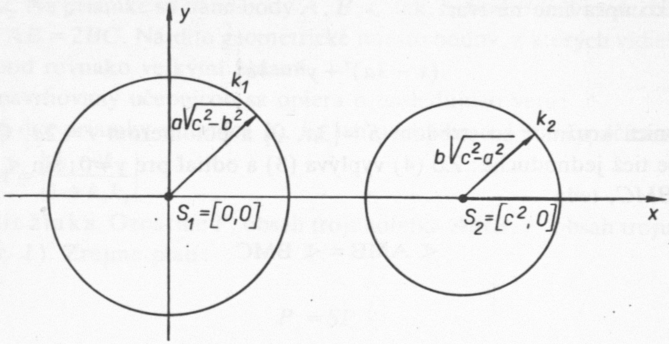
Riešenie žiaka. Vetu dokážeme analyticky. Dokázať ju znamená dokázať, že kružnice $k_1=[S_1,\ a\sqrt{c^2-b^2}]$, $k_2=[S_2,\ b\sqrt{c^2-b^2}]$ *(obr. 2)* majú najviac jeden spoločný bod. Spoločné body kružníc k_1, k_2 určíme riešením sústavy

$$x^2+y^2=a^2(c^2-b^2)$$
$$(x-c^2)^2+y^2=b^2(c^2-a^2)$$

Po krátkom výpočte dostaneme:

$$x=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$$

$$y^2=a^2\,(c^2-b^2)-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2$$



Obr. 2

Teraz stačí ukázať, že $y^2 \leqq 0$, teda

$$\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2 \geqq a^2\,(c^2-b^2)$$

Táto nerovnosť je vzhľadom na podmienky, ktorým vyhovujú a, b, c, ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2} \geqq \sqrt{a^2(c^2-b^2)}$$

Ak označíme $c^2-b^2=u$, $a^2=v$, máme známu nerovnosť:

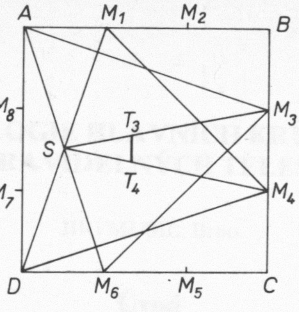
$$\frac{u+v}{2} \geqq \sqrt{uv}$$

Tým sme dôkaz skončili.

Príklad 4. V rovine je daný štvorec. Nájdite množinu ťažísk všetkých trojuholníkov, ktorých vrcholy ležia na hranici štvorca tak, že delia jeho obvod na tri časti rovnakej dĺžky.

Komentár odporúča použiť metódu analytickej geometrie.

Myšlienka žiaka. Rozdeľme bodmi $M_1, M_2, \ldots, M_8$ každú stranu štvorca na tri zhodné úsečky *(obr. 3)*. Nech sa vrchol x trojuholníka rovnomerne pohybuje po úsečke AM_1 od A do M_1; potom vrchol Y rovnomerne prebieha úsečku M_3M_4 od M_3 do M_4 a vrchol Z rovnomerne úsečku M_6D od M_6 do D. Stred S úsečky XZ sa pri tomto pohybe nemení. Ťažiská všetkých trojuholníkov s požadovanou



Obr. 3

vlastnosťou vyplnia úsečku T_3T_4, ktorá je obrazom úsečky M_3M_4 v rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom $\varkappa = \frac{1}{3}$. Ďalší postup je zrejmý.

Aj keď riešenie navrhované komentárom sa dá použiť i pri zložitejších úlohách, ktoré sú podobné úlohe 4, uvedený postup môže uplatniť aj žiak, ktorý sa ešte nestačil zoznámiť so základmi analytickej geometrie.

Záverom chceme zdôrazniť známu pravdu o symetrickosti relácie „*x* učí *y*" v množine všetkých ľudí. V odvahe pedagóga priznať túto vlastnosť vyučovania spočíva jedna z možností, ako dosiahnuť u svojich žiakov väčší záujem a porozumenie pre matematiku a matematikov (ale nielen pre matematiku a nielen pre matematikov).

Literatúra

[1] Matematika pre 3. ročník SVŠ, prírodovedná vetva. SPN, Bratislava 1968.
[2] Komentár k riešeniu súťažných úloh I. kola kategórie B XXV. ročníka MO.