TESTOVANIE PARAMETRICKÝCH HYPOTÉZ S NIEKTORÝMI APLIKÁCIAMI PRI ŠTATISTICKEJ KONTROLE VÝROBKOV

MILAN KRIŠŤÁK, Bratislava

Niektoré metódy matematickej štatistiky a teórie pravdepodobnosti sa dajú použiť pri plánovaní výroby, minimalizovaní výrobných nákladov a počtu nekvalitných výrobkov, zdokonaľovaní výskumných prác a pri mnohých iných praktických činnostiach, ktoré môžeme formulovať ako určité pokusy s náhodne sa meniacimi výsledkami. V tejto práci sa zaoberáme výkladom základných pojmov tzv. parametrických testov štatistických hypotéz, ktoré obsahujú určitú skupinu metód matematickej štatistiky založených na teórii pravdepodobnosti.

Prvá časť práce obsahuje výklad niektorých základných pojmov z teórie pravdepodobnosti, ktoré treba na pochopenie vlastnej problematiky tohto článku. Predpokladáme, že čitateľ nie je s nimi oboznámený. Táto časť práce môže slúžiť aj ako úvod k štúdiu iných článkov z príbuzných odborov matematiky, ktoré budú v tomto časopise uverejnené.

V druhej časti práce, po formulácii základnej úlohy parametrických testov a výklade niektorých základných pojmov a ich vzťahov na rôznych príkladoch, ukazujeme niektoré možnosti využitia teórie na riešenie praktických úloh v štatistickej kontrole akosti výrobkov. V zozname literatúry sú uvedené u nás dostupné práce, vhodné aj pre začiatočníkov.

1. Niektoré pojmy z teórie pravdepodobnosti

Pod pojmom náhodný pokus budeme rozumieť oveľa viac, ako si čitateľ môže predstavovať na základe niektorých klasických príkladov (hod mincou, kockou, ťahanie lósov a pod.). Môže to byť napr. vyhľadanie alebo vytvorenie akýchkoľvek podmienok, pri ktorých určité pozorované udalosti môžu, ale nemusia nastať. Všetky pokusy prírodných a technických vied, pri ktorých nie je výsledok jednoznačne určený režimom pokusu, môžeme považovať za náhodné pokusy.

Zo skúseností vieme, že priebeh pokusov ovplyvňuje mnoho nepredvídateľných okolností, ktoré sa vymykajú akejkoľvek kontrole. Výsledky

opakovaných pokusov nie sú presne rovnaké, aj keď ich robíme stále za rovnakých podmienok. Podobne je tomu aj pri pozorovaní určitých znakov na rozsiahlejších súboroch rovnocenných jednotiek. Veľké množstvo malých individuálnych odchýlok pozorovaných jednotiek spôsobuje nepredvídateľné kolísanie výsledkov pozorovaní. Na presné popísanie náhodného pokusu treba stanoviť jeho všetky možné výsledky. Tieto výsledky nazveme elementárnymi udalosťami a ich súhrn bude základnou množinou elementárnych udalostí. Označme túto množinu V. Ľubovoľnú podmnožinu množiny V nazveme náhodnou udalosťou (alebo náhodným javom). Tie prvky množiny V (t. j. tie výsledky pokusu), ktoré sú aj prvkami danej podmnožiny — náhodnej udalosti, nazývame elementárnymi udalosťami priaznivými tejto náhodnej udalosti. Všetky elementárne udalosti musia mať tieto vlastnosti:

1. sú vzájomne nezlučiteľné, t. j. ak nastane jedna z nich, nemôže nastať iná,
2. pri každej realizácii náhodného pokusu iste nastane aspoň jedna z nich.

Základnú množinu elementárnych udalostí V nazývame aj istou udalosťou. Je vhodné zaviesť aj pojem tzv. nemožnej udalosti. Tak nazývame prázdnu množinu, ktorá neobsahuje žiadne elementárne udalosti a označujeme ju $\emptyset$. Pre názornosť si uveďme príklad:

Po vyhodení kocky s očíslovanými stenami nemôžeme presne predpovedať, aké číslo sa objaví po jej dopade na hornej stene. Vieme však iste, že to bude jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6. Množinu týchto šiestich čísel môžeme označiť V, je to v tomto prípade základná množina elementárnych udalostí. Pre udalosť, že sa objaví párne číslo, sú priaznivé výsledky 2, 4, 6, a preto množina týchto troch čísel, ktorá je podmnožinou množiny V, je náhodnou udalosťou. Ak sa pýtame, do akej miery sme oprávnení predvídať výskyt tejto náhodnej udalosti, potom môžeme usudzovať takto:

Pri realizácii každého pokusu (hod kockou — po dopade číslo na hornej stene — $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) je šesť možných výsledkov a tri z nich sú tie, ktoré vedú k párnemu číslu. Môžeme teda v pomere 3 : 6 očakávať, že padne číslo párne. Podobne môžeme v pomere 5 : 6 očakávať, že nepadne šestka, alebo v pomere 4 : 6, že padne číslo menšie ako päť atď. Tieto úsudky sú však správne len vtedy, ak sa každý zo 6 možných výsledkov môže vyskytnúť rovnakou mierou, t. j. výsledok, že padne 1, je rovnako možný ako výsledok, že padne 2, 3, 4, 5 alebo 6. Toto môžeme predpokladať len vtedy, ak je kocka vyrobená naprosto rovnomerne a z homogénneho materiálu (ideálna kocka). Uveďme iný príklad: Skúmajme dodávku výrobkov obsahujúcu napr. a dobrých výrobkov a b nepodarkov. Vyberieme náhodne jeden výrobok a pýtame sa, do akej miery sme oprávnení predpokladať, že vyberieme práve dobrý výrobok. Počet všetkých

výrobkov je $a + b$ a z toho je a tých, ktoré vedú k výberu dobrého výrobku. Môžeme teda v pomere $a : a + b$ očakávať, že vyberieme dobrý výrobok. Toto opäť platí len za predpokladu, že výber ktoréhokoľvek výrobku je rovnako možný. Teraz môžeme vysloviť klasickú definíciu pravdepodobnosti:

Ak pri určitom pokuse môžeme určiť n výsledkov, ktoré sa vzájomne vylučujú, vyčerpávajú všetky možnosti a ich výskyt je rovnako možný, potom pravdepodobnosť určitej náhodnej udalosti určenej týmto pokusom a obsahujúcej práve m určitých výsledkov zo všetkých n možných je pomer počtu týchto m výsledkov priaznivých danej náhodnej udalosti k počtu všetkých n možných výsledkov tohto pokusu.

Pravdepodobnosť istej udalosti V sa rovná 1 a pravdepodobnosť nemožnej udalosti $\emptyset$ sa rovná 0.

O výsledkoch náhodného pokusu, ktoré sme nazvali aj elementárnymi udalosťami, sme pri klasickej definícii pravdepodobnosti museli predpokladať, že sú medzi sebou rovnako pravdepodobné, t. j. ak ich je n, potom pravdepodobnosť ktoréhokoľvek z nich sa rovná $1/n$. Pri reálnych udalostiach sa môže stať, že výsledky pokusov nie sú rovnako pravdepodobné, lebo môžu existovať dôvody, prečo nie sú rovnakou mierou uskutočniteľné. Napr. ak hádžeme kocku, ktorá nie je úplne symetrická alebo nie je vyrobená z rovnorodého materiálu, potom nemôžeme predpokladať, že všetkých šesť čísel je na nej rovnako pravdepodobných. Môžu tiež existovať také náhodné udalosti, ktoré sú definované na pokusoch s nekonečnou množinou všetkých možných výsledkov. Pre takéto náhodné udalosti nemôžeme klasickú definíciu pravdepodobnosti použiť a treba pravdepodobnosť definovať axiomaticky.

Axiomaticky vybudoval teóriu pravdepodobnosti A. N. Kolmogorov. Prvotným pojmom je pritom opäť základná množina elementárnych udalostí V (nemusí však byť konečná). Čo konkrétne predstavujú jej prvky — elementárne udalosti —, je pre logickú výstavbu teórie pravdepodobnosti nepodstatné. Ich pravdepodobnosti nazveme elementárnymi pravdepodobnosťami a predpokladáme, že sú určitým spôsobom stanovené a nemusia byť rovnaké. Uvažujme ďalej nejakú množinu S, ktorej prvky sú podmnožiny množiny V — náhodné udalosti. (S sa nazýva systém náhodných udalostí a musí mať určité vlastnosti, ktoré nebudeme uvádzať — pozri však [5].) Pre každú náhodnú udalosť A patriacu do systému S existuje číslo $P(A)$, ktoré nazývame pravdepodobnosť náhodnej udalosti A a ktoré má tieto vlastnosti:

1. Pravdepodobnosť $P(A)$ nadobúda pre ľubovoľné $A \in S$ hodnoty medzi nulou a jednotkou, t. j. $0 \leqq P(A) \leqq 1$. Pritom je $P(\emptyset) = 0$, pričom aj $\emptyset \in S$ a $P(V) = 1$, $V \in S$.

2. Ak pri n-násobnom opakovaní pokusu, pri ktorom pozorujeme náhodnú udalosť A, sa A vyskytne m-ráz, potom pri dosť veľkom n je skoro

isté, že relatívna početnosť výskytu A, rovnajúca sa m/n, sa dosť málo líši od pravdepodobnosti $P(A)$.

3. Ak sa $P(A)$ líši od nuly len nepatrne, je skoro isté, že pri jednom pokuse A nenastane, a ak sa $P(A)$ líši od jednotky len nepatrne, potom je skoro isté, že pri jednom pokuse A nastane. (Axiomatický systém teórie pravdepodobnosti neuvádzame, ale pozri [5].)

Pravdepodobnosť je tedy určitá kvantitatívna charakteristika náhodných udalostí, ktorú môžeme vykonaním pokusov odhadovať (na základe druhej vlastnosti) relatívnymi početnosťami. Existuje teda úzka súvislosť medzi pravdepodobnosťou a relatívnou početnosťou.

Ďalším dôležitým pojmom teórie pravdepodobnosti je pojem náhodnej premennej (alebo náhodnej veličiny), ktorej hodnotami sú reálne čísla priradené výsledkom náhodného pokusu. Je to teda nejaká reálna funkcia definovaná na množine elementárnych udalostí. Náhodné premenné budeme označovať veľkými písmenami, napr. X, Y, Z a hodnoty, ktoré môžu nadobúdať, malými písmenami x, y, z. Napr. pri hádzaní kocky môžeme definovať náhodnú premennú X nasledujúcim spôsobom: každej elementárnej udalosti, t. j. číslu, ktoré sa objaví po dopade na hornej stene, priradíme toto číslo. Potom X môže nadobúdať šesť hodnôt $x_i = i$, $i = 1, \ldots, 6$. Počet zásahov cieľa pri n výstreloch je náhodná premenná Y, ktorej možné hodnoty sú $0, 1, \ldots, n$. Počet výziev, ktoré prídu ne telefónnu centrálu za určitý čas, je náhodná premenná Z, o ktorej môžeme predpokladať, že nadobudne aj spočítateľne veľa hodnôt $0, 1, 2, \ldots$ Ak sú závory na železničnom prechode spustené na čas t_1, potom čas, za ktorý je určité vozidlo pri závorách zdržané, je náhodná premenná T, ktorá môže nadobúdať všetky možné hodnoty t z intervalu $\langle 0, t_1 \rangle$. Na určenie náhodnej premennej nestačí vedieť len hodnoty, ktoré môže nadobúdať, ale naviac treba vedieť pravdepodobnosti, s ktorými môže tieto hodnoty nadobúdať. Pritom pravdepodobnosť, že náhodná premenná X nadobudne hodnotu x, kladieme rovnajúcu sa pravdepodobnosti náhodnej udalosti, pozostávajúcej z tých elementárnych udalostí, ktorým náhodná premenná X priradzuje hodnotu x.

Náhodnú premennú X nazývame diskrétnou, ak nadobúda len konečne alebo nanajvýš spočítateľne veľa reálnych hodnôt $x_1, x_2 \ldots$ s určitými pravdepodobnosťami $p_1, p_2, \ldots$, t. j. $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$ (Diskrétne náhodné premenné sú napr. X, Y, Z z vyššie uvedených príkladov.) Náhodná premenná, ktorá môže nadobúdať všetky reálne hodnoty z určitého intervalu (a, b) (môže byť aj $a = -\infty$, $b = \infty$), už nie je diskrétnou. Patrí do inej skupiny náhodných premenných, ktoré budeme neskôr presne definovať. (Takouto je napr. T z posledného príkladu).

Pri aplikáciách teórie pravdepodobnosti často vystačíme s vyjadrením náhodných udalostí pomocou náhodných premenných. Aj udalosti, ktoré nemajú kvantitatívny charakter, sa dajú takto vyjadriť. Napr. pri hádzaní

mince môžeme výsledok hodu vyjadriť náhodnou premennou, ktorá má hodnotu 0, ak padne napr. znak a hodnotu 1, ak padne číslo.

Náhodná premenná — ako reálna funkcia elementárnych udalostí môže mať tú istú hodnotu aj na viacerých elementárnych udalostiach. Ak jednotlivé (rôzne) hodnoty náhodnej premennej X označíme x_i, kde i prebieha určitú množinu indexov I, pravdepodobnosť náhodnej udalosti $\{X = x_i\}$ označíme p_i, potom p_i je vlastne súčtom elementárnych pravdepodobností prislúchajúcich elementárnym udalostiam, na ktorých náhodná premenná X nadobudla (tú istú) hodnotu x_i. Súbor hodnôt x_i a ich pravdepodobnosti p_i nazývame zákonom rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (alebo jednoducho rozdelením pravdepodobnosti). Ak medzi výsledkami náhodného pokusu zanedbáme všetky rozdiely, okrem tých, ktoré spočívajú v rozdieloch hodnôt sledovanej náhodnej premennej, potom sa popis daného pokusu redukuje na popis rozdelenia pravdepodobnosti tejto náhodnej premennej. Často býva rozhodujúce práve rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej a vôbec nezáleží na tom, na akých elementárnych udalostiach bola definovaná.

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X je jednoznačne určené jej distribučnou funkciou $F(x)$. Je to funkcia, ktorá každému reálnemu číslu x priraďuje pravdepodobnosť náhodnej udalosti, pozostávajúcej z tých elementárnych udalostí, na ktorých náhodná premenná X nadobúda hodnoty menšie alebo nanajvýš rovnajúce sa danému číslu x, t. j. symbolicky môžeme písať

$$F(x) = P(X \leqq x)$$

a má tieto základné vlastnosti:

1. F je neklesajúca funkcia, t. j. ak je $x_1 < x_2$, potom je $F(x_1) \leqq F(x_2)$
2. Ak označíme limity $\lim\limits_{u \to \infty} F(n) = F(\infty)$ a $\lim\limits_{n \to -\infty} F(n) = F(-\infty)$, potom tieto limity existujú a platí $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.
3. F je sprava spojitá.

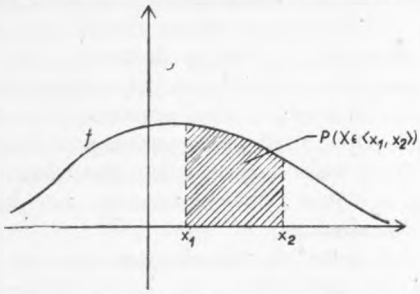
Dá sa dokázať (pozri napr. [9]), že každá funkcia s týmito vlastnosťami je distribučnou funkciou niektorej náhodnej premennej.

Ak je špeciálne X diskrétna náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty x_i, $i = 1, 2, \ldots$ potom predpis, ktorý každej jej hodnote priraďuje príslušnú pravdepodobnosť, t. j.

$$P(X = x_i) = p_i, \; i = 1, 2, \ldots$$

sa nazýva pravdepodobnostnou funkciou. Postupnosťou hodnôt $\{x_i\}$ a pravdepodobností $\{p_i\}$ (pre ktorú zrejme platí $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$) je dané v tomto prípade rozdelenie pravdepodobnosti diskrétnej náhodnej premennej X.

Ak je X náhodná premenná, pre ktorú existuje po častiach spojitá nezáporná reálna funkcia f definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$ taká, že pre ľubovoľné dve reálne čísla $x_1 \leqq x_2$ sa pravdepodobnosť toho, že X nadobúda hodnoty z intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$, rovná obsahu plochy vymedzenej osou úsečiek, kolmicami na túto os v bodoch x_1 a x_2 a grafom funkcie f, potom takúto náhodnú premennú nazývame spojitou *(obr. 1)*. Funkciu f nazývame hustotou rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej. Ak je $x_1 = x_2$, potom príslušnou plochou je úsečka a jej obsah sa rovná nule,



Obr. 1. Pravdepodobnosť náhodnej udalosti $\{X \in \langle x_1, x_2 \rangle\}$

t. j. $P(X = x_1) = P(X \in \langle x_1, x_1 \rangle) = 0$. Pre čitateľa, ktorý pozná pojmy integrálu a derivácie, môžeme vyjadriť vzťah distribučnej funkcie F a hustoty f spojitej náhodnej premennej X takto

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$$

Hustotou f spojitej náhodnej premennej X je dané jej rozdelenie pravdepodobnosti.

Rozdelenia pravdepodobnosti bývajú charakterizované aj určitými číselnými hodnotami, ktoré nazývame parametrami rozdelenia pravdepodobnosti. Jedným z najdôležitejších parametrov je tzv. stredná hodnota $\mu = E(X)$ náhodnej premennej X, ktorú môžeme v diskrétnom prípade s pravdepodobnostnou funkciou p_i definovať takto:

$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, ak rad na pravej strane absolútne konverguje

a v spojitom prípade s hustotou f takto:

$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$, ak integrál na pravej strane absolútne konverguje.

(Existuje aj spoločné vyjadrenie strednej hodnoty pre oba prípady pomocou Stieltjesovho integrálu — pozri napr. [5], [9].) Z ďalších parametrov uveďme aspoň rozptyl σ^2, ktorý je definovaný takto

$$\sigma^2 = E\,[(X - E\,(X)^2] = E\,(X^2) - E^2\,(X) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i)^2, & \text{v diskr. prípade,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f\,(x)\,\mathrm{d}x - (\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f\,(x)\mathrm{d}x)^2, & \text{v spojitom prípade.} \end{cases}$$

Ďalšie podrobnosti o parametroch nájde čitateľ napr. v [3], [4], [11].

Z konkrétnych rozdelení pravdepodobnosti uveďme aspoň najzákladnejšie:

Uvažujme pokus, ktorý má len dva možné vzájomne sa vylučujúce výsledky A a $\bar{A}$. Nech pre pravdepodobnosti ich výskytov platí

$$P\,(A) = p,\ P\,(\bar{A}) = 1 - p = q$$

Príkladom takého pokusu môže byť výber jedného výrobku z určitej skupiny, medzi ktorými sledujeme len to, či sú dobré alebo nepodarky, a zisťujeme, do ktorej skupiny patrí ten vybraný. Sú možné len dva výsledky: vybraný výrobok je buď dobrý (A), alebo nepodarok ($\bar{A}$). Náhodné udalosti A a $\bar{A}$ môžeme popísať náhodnou premennou X, ktorá má len dve hodnoty: 0 a 1, ktoré nadobúda s nasledujúcimi pravdepodobnosťami

$$P\,(X = 1) = p,\ P\,(X = 0) = \mathrm{q}. \tag{1}$$

Vidíme, že $X = 1$, ak nastane A a $X = 0$, ak nastane $\bar{A}$. Rozdelenie pravdepodobnosti dané pravdepodobnostnou funkciou (1) nazývame alternatívne s parametrom p.

Predpokladajme, že pokus, ktorý sme vyššie popísali, urobíme nezávisle od seba n-ráz, stále za rovnakých podmienok (n-násobný výber po jednom výrobku s vrátením po každom ťahu). Potom výsledky takého n-násobného opakovania pokusu bude popisovať postupnosť n nezávislých náhodných premenných $\{X_1, \ldots, X_n\}$, z ktorých každá má to isté alternatívne rozdelenie s parametrom p. Ak definujeme novú náhodnú premennú $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, ktorá nadobúda hodnoty $k = 0, 1, \ldots, n$ rovnajúce sa počtu tých opakovaní pokusu, pri ktorých nastala udalosť A, potom sa dá dokázať že jej rozdelenie je dané pravdepodobnostnou funkciou

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{2}$$

Hovoríme, že rozdelenie pravdepodobnosti dané funkciou (2) je binomické s parametrami n a p.

Ak diskrétna náhodná premenná X nadobúda hodnoty $k = 0, 1, 2, \ldots$ s pravdepodobnosťami

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \tag{3}$$

potom hovoríme, že rozdelenie pravdepodobnosti dané funkciou (3) je Poissonovo, s parametrom λ.

Ak náhodná premenná X nadobúda celočíselné hodnoty k vyhovujúce nerovnostiam $0 \leqq k \leqq Np$, $0 \leqq n - k \leqq Nq$ s pravdepodobnosťami

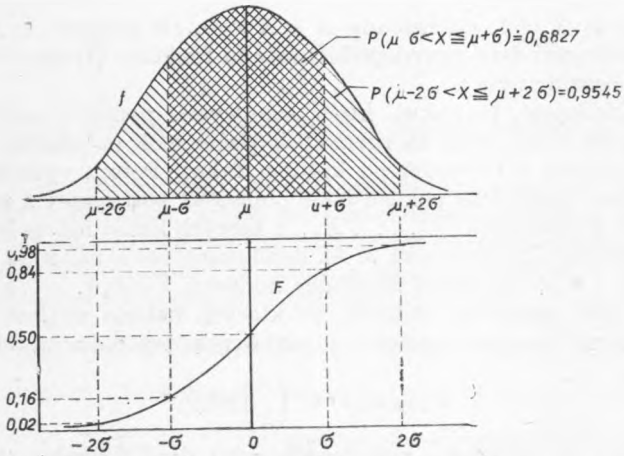
$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} \tag{4}$$

potom hovoríme, že rozdelenie dané funkciou (4) je hypergeometrické, s parametrami N, n, p.

Zo spojitých rozdelení uvedieme len to najdôležitejšie — normálne. Ak je

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

potom hovoríme, že spojitá náhodná premenná X má tzv. normálne roz-



Obr. 2. Vzťah hustoty f a distribučnej funkcie F normálneho rozdelenia

delenie s parametrami μ a σ^2 [budeme to označovať $N(\mu, \sigma^2)$], ak jej distribučná funkcia je

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \tag{5}$$

(Parameter μ je strednou hodnotou a σ^2 rozptylom tejto náhodnej premennej.) $\Phi(x)$ je distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej, ktorá má normálne rozdelenie $N(0,1)$ — tzv. štandardné (normované) normálne. Ďalšie podrobnosti o spomenutých a ďalších rozdeleniach môže čitateľ nájsť v učebniciach [2], [5], [11], [4].

Z niekoľkých uvedených typov rozdelení pravdepodobnosti vidíme, že každé je charakterizované jedným alebo niekoľkými parametrami. Niekedy je zvykom príslušné parametre písať za argument v distribučnej funkcii. Napr. distribučnú funkciu rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$ danú (5) by sme označili $F(x; \mu, \sigma^2)$.

V praxi najčastejšie tieto parametre nepoznáme. Predmetom nasledujúcej časti je skúmanie metód, pomocou ktorých môžeme na základe realizácií náhodných premenných (teda na základe výsledkov pokusov) zistiť, či platia alebo neplatia určité predpoklady — hypotézy o skúmaných (neznámych) parametroch.

2. Testovanie parametrických hypotéz

Predpokladajme, že je daný veľmi veľký súbor N jednotiek určitého druhu, na ktorých potrebujeme preskúmať nejaké ich vlastnosti. Môžeme si napr. predstaviť súbor N výrobkov, na ktorých potrebujeme merať určitý znak. Ak by sme zistili hodnoty x_i sledovaného znaku na všetkých jednotkách $i = 1, \ldots, N$, potom by sme mohli vypočítať napr. strednú hodnotu $\mu = 1/N \sum_{i=1}^{N} x_i$, rozptyl $\sigma^2 = 1/N \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$ prípadne ďalšie parametre daného súboru. Málokedy bude však možné preskúmať celý súbor veľmi veľkého počtu N jednotiek, ktorý nazývame základným súborom rozsahu N. Najčastejšie sa musíme uspokojiť s tým, že z neho náhodne vyberieme niektoré $n < N$ jednotky. Týchto n náhodne vybraných jednotiek budeme nazývať výberovým súborom rozsahu n. Na základe hodnôt sledovaného znaku zistených len na jednotkách výberového súboru môžeme (po prečíslovaní vybraných n jednotiek od 1 do n) vypočítať určité ukazovatele výberového súboru, napr. výberový priemer $\bar{x} = 1/n \sum_{i=1}^{n} x_i$, výberový rozptyl $s^2 = 1/(n-1) \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$, prípadne ďalšie charakteristiky výberového súboru. Tieto môžeme považovať za hodnoty určitých

náhodných premenných, lebo závisia od náhodne sa meniaceho výberového súboru.

Všeobecne môžeme ktorýkoľvek parameter Θ základného súboru považovať za pevnú neznámu hodnotu závislú od všetkých hodnôt x_i, $i = 1, \ldots, N$, ktorú by sme mohli určiť len po preskúmaní všetkých N jednotiek základného súboru. Je dosť dôvodov, prečo nezvykneme skúmať celé základné súbory (napr. pri kontrole určitých výrobkov sa tieto zničia, alebo už spomenutý ich veľmi veľký rozsah N, ktorý môže byť často aj nekonečný atď.). Pomocou hodnôt náhodného výberu $X_1, \ldots, X_n$ môžeme neznáme parametre Θ základného súboru nejakým spôsobom odhadovať. Toto je úlohou štatistickej teórie odhadu, ktorou sa tu nemienime zaoberať (pozri však [6]). Čo bude našou úlohou pri testovaní parametrických hypotéz, vysvetlíme teraz trocha všeobecnejšie, ale ďalej to budeme konkretizovať.

Našou úlohou je vysvetliť niektoré základné pojmy teórie testovania štatistických hypotéz. Hypotézami nazývame určité predpoklady vzťahujúce sa na rozdelenia pravdepodobností skúmaných náhodných premenných alebo na hodnoty rôznych neznámych parametrov základných súborov. Overovanie správnosti takých predpokladov na základe výsledkov náhodných výberov nazývame testovanie štatistických hypotéz. Sformulujeme to trocha presnejšie.

Predpokladajme, že určitá náhodná premenná X je n-rozmerný náhodný vektor, ktorého zložky sú náhodné premenné $X_1, \ldots, X_n$. V tomto prípade môžeme distribučnú funkciu definovať podobne ako v jednorozmernom: Ak sú $x_1, \ldots, x_n$ ľubovoľné reálne čísla, potom pravdepodobnosť súčasného výskytu náhodných udalostí $\{X_1 \leqq x_1\}, \ldots, \{X_n \leqq x_n\}$ definuje distribučnú funkciu $F_n(x)$ náhodného vektora X, t. j.

$$P(X_i \leqq x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_n(x)$$

Nech rozdelenie pravdepodobnosti náhodného vektora X závisí od nejakého r-rozmerného parametra $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_r)$, ktorý je prvkom r-rozmerného priestoru Ω — tzv. parametrického priestoru. Pritom Ω je podmnožinou r-rozmerného euklidovského priestoru R_r, t. j. $\Theta \in \Omega \subset R_r$. Pod jednotlivými Θ_i si môžeme predstaviť rôzne parametre jednotlivých rozdelení uvedených v prvej časti. Pri označení príslušnej distribučnej funkcie sa niekedy zvykne parameter Θ vyznačiť za jej argument x, ako sme už v konkrétnom prípade normálneho rozdelenia uviedli. V tomto všeobecnom prípade to bude takto $F_n(x, \Theta)$.

Najdôležitejší špeciálny prípad n-rozmerného náhodného vektora X dostaneme, ak ho považujeme za nezávislý náhodný výber rozsahu n, napr. zo základného súboru, ktorý má rozdelenie dané distribučnou funkciou $F(x, \Theta)$. Z nezávislosti zložiek X_i takéhoto náhodného vektora X dostaneme, že jeho distribučná funkcia F_n sa rovná súčinu distribučných funkcií zložiek X_i, t. j.

$$F_n(x, \Theta) = F(x_1, \Theta)\, F(x_2, \Theta) \ldots F(x_n, \Theta)$$

Nech je Θ_0 určitá hodnota parametra Θ a ω určitá podmnožina parametrického priestoru Ω. Potom môžeme definovať ako parametrickú hypotézu predpoklad, že hodnota Θ_0 patrí do danej podmnožiny ω, t. j. $\Theta_0 \in \omega$. Tento predpoklad nazývame nulovou hypotézou. Oproti tomu predpoklad, že $\Theta_0 \in \Omega - \omega$ nazveme alternatívnou hypotézou. Takto sformulovanú nulovú parametrickú hypotézu môžeme označiť $\mathscr{H} = \mathscr{H}(\omega, \Omega)$. Hovoríme, že $\mathscr{H}$ je správna, ak $\Theta_0 \in \omega$ a nesprávna, ak $\Theta_0 \in \Omega - \omega$. Ak je ω len jednobodová podmnožina Ω, potom $\mathscr{H}$ nazývame jednoduchou parametrickou hypotézou, v opačnom prípade zloženou parametrickou hypotézou. Otázku prijať, resp. zamietnuť $\mathscr{H}$ riešime na základe hodnôt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ náhodného vektora X zistených vykonaním náhodného pokusu, na ktorom je X definovaná.

Množinu všetkých možných hodnôt x, ktoré môže náhodný vektor X pri danom pokuse nadobúdať, nazveme výberovým priestorom a označíme ho $\mathscr{X}$. (Zrejme je $\mathscr{X} \subset R_n$). Nech je W_n podmnožinou výberového priestoru. Budeme vykonávať nasledujúce rozhodnutia: ak po realizácii príslušného pokusu zistíme hodnotu x, ktorá patrí do tejto podmnožiny W_n, t. j. ak $x \in W_n$, potom $\mathscr{H}$ zamietneme ako nesprávnu a ak $x \in W_n^c = \mathscr{X} - W_n$, potom $\mathscr{H}$ nemôžeme zamietnuť. K jej prípadnému zamietnutiu by mohlo dôjsť napr. zväčšením rozsahu výberu n. Nulovú hypotézu sa obvykle snažíme zamietnuť, a teda prijať alternatívnu, lebo ako alternatívnu hypotézu formulujeme také predpoklady, ktorých platnosť potrebujeme overiť. Ak nejaký test nebude nulovú hypotézu zamietať, potom to ešte nemusí znamenať, že ju môžeme prijať za správnu. V takých prípadoch hovoríme, že daný test pri danom rozsahu výberu nestačil zamietnuť $\mathscr{H}$. V súvislosti s tým môžu vzniknúť chyby dvoch druhov:

1. zamietneme $\mathscr{H}$ a v skutočnosti je správna — chyba 1. druhu;
2. prijmeme $\mathscr{H}$ a v skutočnosti je nesprávna — chyba 2. druhu.

Výber podmnožiny W_n a zamietnutie $\mathscr{H}$ ak $x \in W_n$ nazveme parametrickým testom hypotézy $\mathscr{H}$, množinu W_n — kritickou oblasťou tohoto testu. Existujú metódy výberu podmnožiny W_n, ktoré pri určitých obmedzeniach minimalizujú pravdepodobnosti chýb 1. a 2. druhu súčasne (pozri [8]). Funkciu argumentu Θ definovanú takto

$$P(W_n \mid (\Theta) = \int_{W_n} \mathrm{d}F_n(x, \Theta) = \tag{6}$$

$$= \begin{cases} \int_{W_n} f(x, \Theta)\, \mathrm{d}x, & \text{ak } X \text{ je spojitá náhodná premenná s hustotou } f(x, \Theta) \\ \sum_{W_n} p(x, \Theta), & \text{ak } X \text{ je diskrétna s pravdepodobnostnou funkciou } p(x, \Theta) \end{cases}$$

nazývame silofunkciou testu s kritickou oblasťou W_n. Integrácia (v spojitom

prípade), resp. sumácia (v diskrétnom prípade) vyskytujúce sa v definícii silofunkcie sa vykonajú cez celý kritický obor W_n. Funkciu argumentu Θ definovanú takto

$$P(W_n^c \mid \Theta) = 1 - P(W_n \mid \Theta) \tag{7}$$

nazývame operatívnou charakteristikou testu s kritickou oblasťou W_n.

Z definícií silofunkcie a operatívnej charakteristiky vidieť, že nadobúdajú hodnoty z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pravdepodobnosť chyby 1. druhu sa rovná

$$P(W_h \mid \Theta), \text{ pre } \Theta \in \omega$$

a pravdepodobnosť chyby 2. druhu sa rovná

$$1 - P(W_n \mid \Theta), \text{ pre } \Theta \in \Omega - \omega$$

Je rozumné žiadať, aby pre každé zvolené malé číslo $\alpha \in (0, 1)$ — hladinu významnosti, platilo

$$P(W_n \mid \Theta) \leqq \alpha, \text{ ak } \Theta \in \omega \tag{8}$$

a súčasne

$$P(W_n \mid \Theta) > \alpha, \text{ ak } \Theta \in \Omega - \omega \tag{9}$$

t. j. aby pravdepodobnosť chyby 1. druhu nebola väčšia ako zvolená hladina významnosti α a súčasne pravdepodobnosť zamietnutia $\mathscr{H}$ ak je nesprávna, prevyšovala α. Ak v (8) pre určitý test platí rovnosť, potom príslušnú kritickú oblasť nazývame podobnou výberovému priestoru. Niekedy sa pri označení kritickej oblasti testu na hladine α použije α ako index, t. j. takto $W_{n,\alpha}$. (Poznamenajme, že pri označovaní pravdepodobností môžeme použiť aj sugestívnejšie označenie, napr. môžeme písať $P(x \in W_n \mid \Theta)$ namiesto $P(W_n \mid \Theta)$, ale dúfajme, že aj pri použití tejto skrátenej formy nedôjde k omylom.) Ak sú $W_{n,\alpha}^*$ a $W_{n,\alpha}$ kritické oblasti dvoch testov na hladine α hypotézy $\mathscr{H}$ také, že platí

$$P(W_{n,\alpha}^* \mid \Theta) \leqq P(W_{n,\alpha} \mid \Theta), \text{ pre každé } \Theta \in \omega \tag{10}$$

a súčasne

$$P(W_{n,\alpha}^* \mid \Theta) > P(W_{n,\alpha} \mid \Theta), \text{ pre každé } \Theta \in \Omega - \omega \tag{11}$$

potom test s kritickou oblasťou $W_{n,\alpha}^*$ nazývame rovnomerne silnejší ako test s kritickou oblasťou $W_{n,\alpha}^*$. Snažíme sa nájsť testy s takými kritickými oblasťami $W_{n,\alpha}^*$, aby nerovnosti (10) a (11) platili súčasne pre všetky podmnožiny $W_{n,\alpha}$ výberového priestoru, pre ktoré je definovaná pravdepodobnosť. Ak sa nám podarí taký test nájsť, potom hovoríme, že ide o rovnomerne najsilnejší test na hladine α hypotézy $\mathscr{H}$ (ω, Ω). Na určenie kritických oblastí používame nejaké funkcie premenných $X, T = T(X)$, ktoré sú tiež náhodné premenné. Ak je X n-rozmerný náhodný vektor,

ktorého zložky tvoria nezávislý náhodný výber rozsahu n, potom funkciu T nazývame testovou štatistikou alebo hovoríme, že príslušný test je založený na štatistike T. Pre ilustráciu zoberme konkrétny prípad:

Nech je $X = (X_1, \ldots, X_n)$ nezávislý náhodný výber rozsahu n z populácie s normálnym rozdelením, ktoré má strednú hodnotu μ a rozptyl σ^2 [toto označujeme $N(\mu, \sigma^2)$]. Parametrický priestor Ω definujme takto $\Omega = \{(\mu, \sigma^2) \in R_2 \colon \sigma^2 > 0\}$, t. j. euklidovská polorovina a jeho podmnožinu ω takto
$\omega = \{(\mu, \sigma^2) \in \Omega : \mu = \mu_0\}$, t. j. euklidovská polpriamka.
Treba testovať zloženú parametrickú hypotézu $\mathscr{H}(\omega, \Omega)$. Za týchto predpokladov sa dá dokázať, že náhodná premenná

$$T(X) = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu)}{S} \tag{12}$$

má Studentovo t-rozdelenie s $(n - 1)$ stupňami voľnosti (pozri napr. [4]). Pritom $\bar{X}$ a S sú výberový priemer a výberová smerodajná odchýlka výberu X. Test našej hypotézy na hladine α môžeme založiť na štatistike (12) a jeho kritický obor definovať takto

$$W_{n,\alpha} = \left\{x \in \mathscr{X} : \left|\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu_0)}{s}\right| > t_\alpha\right\} = \left\{x \in \mathscr{X} : \frac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu_0)}{s} > t_{\frac{\alpha}{2}}, \text{ alebo } \frac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu_0)}{s} < -t_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

kde pre vopred zvolené $\alpha \in (0, 1)$ kritickú hodnotu $t_{\frac{\alpha}{2}}$ určíme z rovnice

$$1 - \int_{-t_{\frac{\alpha}{2}}}^{t_{\frac{\alpha}{2}}} f_{n-1}(t)\, dt = \frac{\alpha}{2}$$

Funkcia $f_{n-1}(t)$ je hustota Studentovho rozdelenia s $(n - 1)$ stupňami voľnosti náhodnej premennej T. Pre niektoré α a n môžeme kritické hodnoty $t_{\frac{\alpha}{2}}$ nájsť v tabuľkách [7]. Z definície množiny ω vidieť, že ide o test nulovej hypotézy

$\mu = \mu_0$, kde μ_0 je istá hodnota parametra μ oproti alternatíve

$\mu \neq \mu_0$, pri neznámej hodnote parametra σ^2. Pritom budeme nulovú hypotézu zamietať, ak na základe určitého náhodného výberu x zistíme, že buď $\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu_0)}{s} > t_{\frac{\alpha}{2}}$, alebo $\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu_0)}{s} < -t_{\frac{\alpha}{2}}$ keď sme vopred pre zvolené α a pre príslušné n našli $t_{\frac{\alpha}{2}}$ v tabuľkách [7].

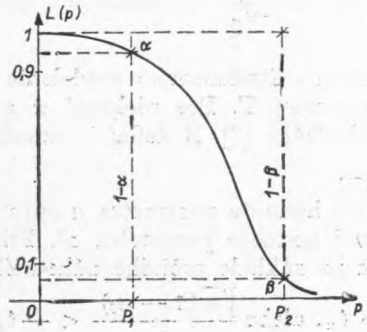
Príklad: Určitá továreň sa rekonštruovala, pritom technologický postup výroby ostal rovnaký s priemerným podielom nepodarkov $\mu_0 = 0{,}05$. Treba overiť, či nastala zmena kvality výroby, pričom nemáme dôvod očakávať zmeny kvality jedným smerom, t. j. očakávať zlepšenie alebo zhoršenie kvality. Predpokladajme, že sledovaný podiel nepodarkov (ukazovateľ kvality) nadobúda hodnoty náhodnej premennej s normálnym rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$.

Budeme testovať nulovú hypotézu

$\mu = 0{,}05$, t. j., že po rekonštrukcii ostala kvalita výroby rovnaká ako pred rekonštrukciou oproti alternatíve

$\mu \neq 0{,}05$, t. j., že sa po rekonštrukcii kvalita výroby zmenila. Po n-násobnom nezávislom opakovaní náhodných výberov rovnakého a dosť veľkého počtu výrobkov zistíme podiely nepodarkov x_i, pri jednotlivých opakovaniach $i = 1, \ldots, n$, vypočítame ich aritmetický priemer $\bar{x}$ a smerodajnú odchýlku s. Pomocou týchto čísel vypočítame hodnotu testového kritéria (12) a pomocou tabuliek [7] určíme pre zvolenú hladinu α kritickú hodnotu $t_{\frac{\alpha}{2}}$. Potom môžeme ľahko overiť, či pre náš výber x platí $x \in W_{n,\alpha}$ alebo $x \in W^c_{n,\alpha}$ a podľa toho sa rozhodneme, či nulovú hypotézu zamietneme alebo nezamietneme.

Poznamenajme, že ak by bol parameter σ známy (napr. z predchádzajúcich skúseností) mohli by sme tú istú hypotézu testovať testom založeným na štatistike $Z = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}$, ktorá už nemá Studentovo rozdelenie, ale normálne $N(0, 1)$ — rozdelenie. Potom všetko z predchádzajúceho príkladu ostane v platnosti, len kritický obor $W_{n,\alpha}$ by sme definovali prostredníctvom štatistiky Z, a teda namiesto kritickej hodnoty $t_{\frac{\alpha}{2}}$ — Studentovho



Obr. 3. Graf operatívnej charakteristiky s rizikom výrobcu α a rizikom odberateľa β

rozdelenia by sme brali kritické hodnoty štandardného normálneho rozdelenia $N(0, 1)$, ktoré sú tiež tabuľkované v [7].

Vyššie sme definovali chyby prvého a druhého druhu, ktoré úzko súvisia s tzv. prijateľným a neprijateľným podielom nevyhovujúcich kusov pri štatistickej kontrole akosti výrobkov. Nech je na kontrolu predložených N výrobkov určitého druhu, medzi ktorými je M (neznáme) nevyhovujúcich kusov. Z týchto N výrobkov vyberieme náhodne n kusov (bez vrátenia) na kontrolu a nech medzi nimi zistíme x kusov nevyhovujúcich. Ak je $x > c$, potom dodávku vrátime — zamietneme a ak je $x \leqq c$, potom dodávku prijmeme. Číslo c je samozrejme vopred nejakým spôsobom určené. Jeden spôsob jeho určenia neskôr ukážeme. Pravdepodobnosť prijatia dodávky za podmienky, že obsahuje podiel nevyhovujúcich $p = \frac{M}{N}$, je operatívnou charakteristikou a označme ju

$$L(p, n, c) = P(x \leqq c/p) = \sum_{j=0}^{c} P(x = j/p)$$

Z N výrobkov, medzi ktorými predpokladáme M nevyhovujúcich, môžeme náhodne vybrať (bez vrátenia) n kusov celkove $\binom{N}{n}$ rôznymi spôsobmi a pravdepodobnosť, že z týchto n vybraných je práve j kusov nevyhovujúcich sa rovná

$$P(x = j/p) = \binom{Np}{j}\binom{N - Np}{n - j}\binom{N}{n}^{-1}$$

Dohodou medzi odberateľom a dodávateľom sa určia čísla p_1 — prijateľný podiel nevyhovujúcich a p_2 — neprijateľný podiel nevyhovujúcich kusov tak, že pri zvolených malých číslach α, β z intervalu (0, 1) platí

$$L(p_i, n, c) = \begin{cases} 1 - \alpha, & \text{pre } i = 1 \\ \beta, & \text{pre } i = 2 \end{cases}$$

Číslo α nazývame riziko výrobcu (t. j. riziko, že dobrá dodávka neprejde) a β riziko odberateľa (t. j. riziko, že zlá dodávka prejde). Vidieť, že čísla α, β sú vlastne pravdepodobnosti chýb prvého a druhého druhu. Typický tvar operatívnej charakteristiky s danými α, β, p_1 a p_2 je na *obr. 2*.

Je známe (a ľahko sa dá ukázať), že hypergeometrické rozdelenie sa dá pre $N > n$ aproximovať binomickým rozdelením, lebo platí

$$\lim_{N \to \infty} \binom{Np}{j}\binom{N - Np}{n - j}\binom{N}{n}^{-1} = \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j}$$

Pri daných α, β p_1, p_2 musí platiť

$$\sum_{j=0}^{c} \binom{Np_i}{j} \binom{N-Np_i}{n-j} \binom{N}{n}^{-1} = \begin{cases} 1-\alpha, & \text{pre } i = 1 \\ \beta, & \text{pre } i = 2 \end{cases}$$

Teda pre dosť veľké N vzhľadom na n môžeme približne písať

$$\sum_{j=0}^{c} \binom{n}{j} p_i^j (1-p_i)^{n-j} = \begin{cases} 1-\alpha, & \text{pre } i = 1 \\ \beta, & \text{pre } i = 2 \end{cases} \tag{13}$$

Pomocou tabuliek binomického rozdelenia [12] pre dané α, β, p_1, p_2 skúmame postupne celé čísla c, čísla $n = n_1$ pre p_1 a α a čísla $n = n_2$ pre p_2 a β tak dlho, až pri niektorom c nájdeme približne $n_1 = n_2$ vyhovujúce vzťahom (13). Takto určíme rozsah výberu $n = n_1 = n_2$ a číslo c, podľa ktorých sa rozhoduje o prijatí, resp. zamietnutí dodávky.

Vyššie sme definovali rovnomerne najsilnejšie testy. Takéto testy sú pre jednoduché parametrické hypotézy dané tzv. Neymannovou—Pearsonovou lemou, ktorá je základom aj pri testovaní mnohých zložených hypotéz. My ju pre nedostatok miesta nemôžeme uviesť, ale čitateľ ju v dosť prístupnej forme môže nájsť napr. v [11], kde sú aj niektoré príklady jej použitia. Existujú, samozrejme, mnohé ďalšie metódy tvorenia kritických oblastí rôznych testov. Čitateľa, ktorý sa vážnejšie zaujíma o túto časť matematickej štatistiky, upozorňujeme na knihu [8], kde nájde dôkladne rozpracovanú teóriu testovanie štatistických hypotéz. Jednoduchší rozbor štatistických testov je v [11]. V rôznych aplikačných učebniciach, napr. [10], [1], [3], môže čitateľ nájsť praktické návody použitia rôznych testov. Upozorňujeme ešte čitateľa, že článok s podobnou tematikou — o tzv. neparametrických a poradových testoch štatistických hypotéz — pripravíme do niektorého z ďalších zväzkov Matematických obzorov.

Literatúra

[1] Fabian, V.: Základní statistické metody. NČSAV, Praha 1963.
[2] Feller, V.: Vvedenie v teoriju verojatnostej. IL, Moskva 1952.
[3] Felix—Bláha: Matematickostatistické metody v chemickem průmyslu. SNTL, Praha 1962.
[4] Garaj, I.—Krišťák, M.: Teória pravdepodobnosti a matematická štatistika (skriptá). Edič. str. SVŠT, Bratislava 1970.
[5] Gnedenko, B. V.: Kurs teorii verojatnostej. Nauka, Moskva 1965.
[6] Hájek, J.: Teorie pravdepodobnostního výběru s aplikacemi, NČSAV, Praha 1960.
[7] Janko, J.: Statistické tabulky. NČSAV, Praha 1958.
[8] Lehmann, E. L.: Proverka statističeskich gipotez. Nauka, Moskva 1964.
[9] Riečan, B.: O pravdepodobnosti a miere. ALFA, Bratislava 1972.
[10] Roth—Josífko—Malý—Trčka: Statistické metody v experimentální medicině. SZN, Praha 1962.
[11] Wilks, S.: Matematičeskaja statistika. Nauka, Moskva 1967.
[12] *Tables of the Binomial Probability Distribution.* Nat. Bur. of Stat. Appl. Math. Ser. 6, 1950.