ZÁKLADY TEÓRIE GRAFOV II

JURAJ BOSÁK, Bratislava

5. Súvislosť v grafe. Komponenty grafu. Rezy

Uvažujme graf, ktorého vrcholmi sú všetky obce v určitej krajine a ktorého hranami sú všetky hradské (t. j. udržiavané cesty zjazdné pre autá) medzi týmito obcami. Potom každé cestovanie automobilom po tejto krajine môžeme popísať tak, že vymenujeme všetky navštívené obce a použité hradské v takom poradí, ako sme ich precestovali, v tvare konečnej postupnosti typu (obec, hradská, obec, hradská, obec, ..., obec). Matematickým vyjadrením takéhoto cestovania je pojem sledu.

Sledom v grafe $G = (V, H, I)$ rozumieme každú postupnosť tvaru

$$S = (v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \ldots, v_n),$$

kde n je celé nezáporné číslo, $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ sú vrcholy grafu G (nemusia byť navzájom rôzne), $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sú (opäť nie nevyhnutne rôzne) hrany grafu G a pre $i = 1, 2, \ldots, n$ platí: v_{i-1} a v_i sú oba konce hrany h_i. Vrchol v_0 nazývame začiatkom sledu S, vrchol v_n koncom sledu S. Pre začiatok a koniec sledu S budeme používať aj spoločný názov kraj sledu S. Číslo n nazývame dĺžkou sledu S. Sledy dĺžky 1 majú tvar (v_0, h_1, v_1); sledy dĺžky 0 majú tvar (v_0), t. j. sú tvorené jediným vrcholom (dali by sa prirovnať k takému „cestovaniu", pri ktorom sa nepohneme z miesta napr. pre poruchu vozidla).

Príklad 9. V grafe, ktorého diagram je na *obr. 16*, je sledom dĺžky 5 konečná postupnosť (10, *j*, 2, *b*, 6, *b*, 2, *j*, 10, *f*, 6). Vrcholy 10 a 6 sú krajmi tohto sledu.

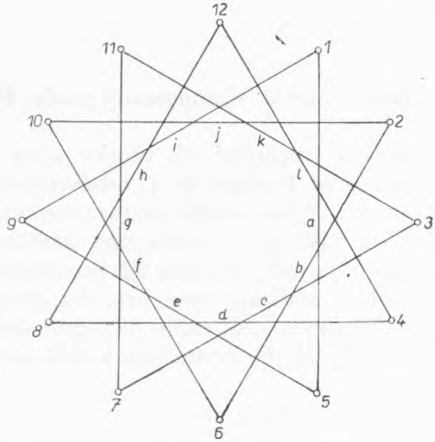
Cvičenie 20. V grafe z *obr. 16* nájdite všetky sledy dĺžky 3 so začiatkom vo vrchole 1.

Ak sled S má začiatok u a koniec v, hovoríme, že sled S začína vo vrchole u a končí vo vrchole v, alebo tiež, že sled S spája vrcholy u a v; sled S vtedy nazývame sledom medzi u a v, alebo stručne u—v sledom.

Príklad 10. Labyrintu (bludišťu) môžeme priradiť graf, ktorého vrcholmi sú význačné miesta labyrintu (napr. križovatky a konce chodieb, východy z labyrintu a pod.), hranami sú chodby labyrintu. Pre osobu nachádzajúcu

sa v labyrinte úloha dostať sa z neho von znamená vlastne v grafe labyrintu nájsť sled, ktorý začína v jeho stanovišti a končí v niektorom z východov.

Medzi dvoma vrcholmi v danom grafe nemusí existovať ani jeden sled, alebo ich môže existovať niekoľko. Budeme hovoriť, že vrchol u súvisí s vrcholom v v grafe G, ak graf G má aspoň jeden u—v sled. V opačnom prípade budeme hovoriť, že vrchol u nesúvisí s vrcholom v (v grafe G).



Obr. 16. Nesúvislý graf

Ľahko sa zistí, že pre ľubovoľné vrcholy u, v a w daného grafu platí:

(5) u súvisí s u;
(6) ak u súvisí s v, tak v súvisí s u;
(7) ak u súvisí s v a v súvisí s w, tak u súvisí s w.

Cvičenie 21. Zistite, ktoré z nasledujúcich tvrdení platia pre ľubovoľné vrcholy u, v, x, y ľubovoľného grafu:

(8) ak u nesúvisí s v, tak v nesúvisí s u;
(9) ak u nesúvisí s v a v nesúvisí s x, tak u nesúvisí s x;
(10) ak u súvisí s v, v súvisí s x a x súvisí s y, tak u súvisí s y.

Vlastnosť (6) ukazuje, že pri úvahách o tom, či vrchol u súvisí s vrcholom v, nezáleží na poradí týchto vrcholov. Môžeme teda hovoriť jednoducho, že vrcholy u a v (navzájom) súvisia.

Môže sa stať, že v danom grafe ľubovoľné dva vrcholy súvisia. V tom prípade tento graf nazývame súvislým; v opačnom prípade nesúvislým.

Hlbší pohľad na pojem súvislosti nám umožňuje pojem komponentu. Majme daný vrchol v v grafe G. Komponentom grafu G patriacim

k vrcholu v nazývame podgraf G_v grafu G, ktorý je indukovaný množinou všetkých vrcholov, ktoré v grafe G súvisia s vrcholom v.

Cvičenie 22. Koľko komponentov má graf z *obr. 16*?

Ľahko sa dokážu nasledujúce tvrdenia:

(11) Dva komponenty grafu sú buď totožné, alebo nemajú žiaden spoločný prvok.

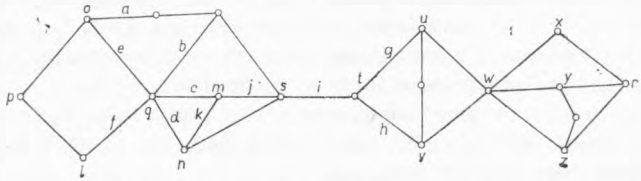
(12) Každý komponent grafu je súvislý graf.

(13) Každý komponent je maximálny súvislý podgraf daného grafu (maximálny v tom zmysle, že už nemožno k nemu pridať žiaden vrchol ani hranu daného grafu bez toho, že by graf prestal byť súvislým).

(14) Graf nemá žiaden komponent práve vtedy, keď je prázdny.

(15) Neprázdny graf je súvislý práve vtedy, keď má jediný komponent.

(16) Graf je nesúvislý práve vtedy, keď má aspoň dva rôzne komponenty.



Obr. 17. Graf komunikácií medzi obcami

Príklad 11. Na *obr. 17* je diagram súvislého grafu, ktorého vrcholy predstavujú obce obsadené nepriateľským vojskom, hrany znamenajú komunikácie medzi nimi. Partizáni dostali rozkaz prerušiť spojenie medzi jednotkami umiestnenými v obciach p a r. Môžu to urobiť rôznymi spôsobmi: obsadením niektorých obcí (čo je však pomerne ťažké) alebo poškodením niektorých komunikácií. Stačilo by napr. zničiť komunikáciu i; to je však most cez rieku, a ten je dobre strážený. Preto treba dať prednosť iným variantom: napr. poškodeniu komunikácií g a h alebo komunikácií a, e a f. Do úvahy pripadá aj poškodenie hradských a, b, c a d. Sú to síce až štyri komunikácie, ale ak sa, povedzme, nachádzajú v lesnatom teréne, v blízkosti sústredenia partizánskych síl, môže byť tento variant najvýhodnejší.

Pokúsme sa teraz matematizovať uvedenú situáciu. Prerušeniu spojenia medzi obcami bude tu odpovedať matematický pojem rezu.

Nech je daný súvislý graf $G = (V, H, I)$. Množinu $H' \subset H$ hrán grafu G nazývame **hranovým rezom** grafu G, ak platí:

(17) po vynechaní všetkých hrán množiny H' z grafu G vznikne nesúvislý graf;

(18) pre každú hranu $h \in H'$ platí: po vynechaní všetkých hrán množiny H' okrem h z grafu G vznikne súvislý graf.

Analogicky sa definuje vrcholový rez grafu s tým rozdielom, že s každým vrcholom musíme z grafu vynechať aj všetky hrany s ním incidentné (keby sme to neurobili, niektorým hranám by chýbal jeden alebo obidva konce).

Napríklad v grafe, ktorého diagram je na *obr. 17*, sú hranovými rezmi množiny $\{a, b, c, d\}$, $\{a, e, f\}$, $\{g, h\}$, $\{i\}$ atď. Príkladmi vrcholových rezov sú množiny $\{x, y, z\}$, $\{u, v\}$, $\{w\}$, atď.

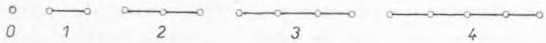
Ak sa hranový rez skladá z jedinej hrany, táto hrana sa nazýva mostom grafu. Ak sa vrcholový rez skladá z jediného vrchola, tento vrchol sa nazýva artikuláciou grafu. Graf z *obr. 17* má most i a artikulácie s, t a w.

6. Druhy sledov. Metrika súvislého grafu

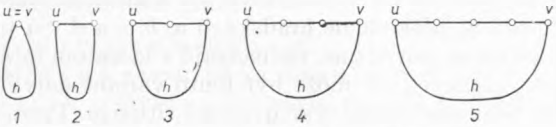
V predošlej kapitole sme videli, že pojem sledu je matematickým vyjadrením pojmu cestovania, známeho z každodenného života. Pravda, jestvujú rôzne druhy cestovania, napr. podľa toho, či sa vraciame do toho mesta, z ktorého sme vyšli, či navštívime niektoré obce viackrát, či použijeme tú istú hradskú viac razy (v tom istom alebo v opačnom smere) a podobne. Preto je prirodzené, že rozoznávame aj rôzne druhy sledov.

Sled nazývame uzavretý alebo otvorený podľa toho, či sa jeho začiatok rovná koncu alebo nie. Sled sa nazýva ťahom, ak sa v ňom žiadna hrana nevyskytuje viac než raz.

Cvičenie 23. Vyšetrite, koľko má graf z *obr. 16* a) ťahov dĺžky 0; b) ťahov dĺžky 1; c) ťahov dĺžky 2; d) ťahov dĺžky 3; e) ťahov dĺžky väčšej než 3; f) uzavretých ťahov; g) otvorených ťahov.



Obr. 18. Cesty dĺžky 0 až 4



Obr. 19. Kružnice dĺžky 1 až 5

Sled sa nazýva cestou, ak sa v ňom žiaden vrchol (a teda ani žiadna hrana) nevyskytuje viac než raz. Ak je u—v sled ťahom (resp. cestou), nazývame ho tiež u—v ťah (resp. u—v cesta). Na *obr. 18* sú schematicky znázornené cesty dĺžky 0, 1, 2, 3 a 4.

Ak k u—v ceste C dĺžky n pridáme hranu h, ktorá sa nevyskytuje v ceste C a ktorá spája vrchol v s vrcholom u (a, samozrejme, pridáme ešte znova vrchol u), dostaneme uzavretý u—u sled dĺžky $n + 1$, ktorý sa nazýva kružnica (prípadne u—u kružnica). Kružnice dĺžky 1 až 5 sú schematicky znázornené na *obr. 19*.

Je zrejmé, že obyčajné grafy (t. j. grafy bez slučiek a násobných hrán) nemôžu obsahovať kružnice dĺžky 1 ani 2. Takéto sú napr. grafy z *obr. 16* a *17*.

Často je výhodné nehovoriť o kružniciach ako o konečných postupnostiach, ale o podgrafoch, ktoré sú vytvorené jej prvkami. Takéto podgrafy nazývame mnohouholníky, presnejšie aj n-uholníky, ak vznikli z kružnice dĺžky n. Napr. je prirodzenejšie povedať, že graf z *obr. 17* má dva trojuholníky, než že má 12 kružníc dĺžky 3 (každému trojuholníku totiž zodpovedá 6 kružníc dĺžky 3, podľa toho, v ktorom vrchole začneme a ktorým smerom budeme obiehať). Podobne podgraf vytvorený prvkami cesty (dĺžky n) sa niekedy nazýva had (dĺžky n).

Graf znázornený na *obr. 17* obsahuje uzavretý sled $(q, f, l, f, q, c, m, j, s, j, m, k, n, d, q, d, n, d, q)$ dĺžky 9. Ak z tohto sledu vhodne vynecháme 12 členov (6 vrcholov a 6 hrán), dostaneme sled (q, c, m, k, n, d, q), ktorý je kružnicou dĺžky 3. Nasledujúca lema ukazuje, že kružnica nepárnej dĺžky je takto „ukrytá" v každom uzavretom slede nepárnej dĺžky.

Lema 3. Z každého uzavretého sledu nepárnej dĺžky, ktorý nie je kružnicou, možno vynechaním istého počtu členov utvoriť kružnicu nepárnej dĺžky.

Dôkaz. Nech je $S = (u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \ldots, h_{n-1}, u_{n-1}, h_n, u_n = u_0)$ uzavretý sled nepárnej dĺžky. Ak S nie je kružnicou, niektoré z vrcholov $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sa rovnajú. Nech $u_i = u_j$, kde $0 \leqq i < j \leqq n - 1$. „Roztrhnime" sled S na dva uzavreté sledy: $S_1 = (u_i, h_{i+1}, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, h_j, u_j = u_i)$; $S_2 = (u_j, h_{j+1}, u_{j+1}, \ldots, u_{n-1}, h_n, u_n = u_0, h_1, u_1, \ldots, u_{i-1}, h_i, u_i = u_j)$.

Keďže sled S mal nepárnu dĺžku, zrejme práve jeden zo sledov S_1 a S_2 má nepárnu dĺžku; s týmto sledom opakujeme uvedený postup atď., až kým nedostaneme kružnicu (tento proces musí po konečnom počte krokov skončiť, lebo dĺžky uzavretých sledov sa neustále zmenšujú).

Cvičenie 24. Možno utvoriť kružnicu vynechaním niektorých členov z každého uzavretého a) sledu; b) ťahu?

Majme daný graf a v ňom dva vrcholy u a v, ktoré súvisia. Vrcholy u a v môžu byť spojené mnohými rôznymi sledmi, prípadne aj sledmi rôznej dĺžky. Najmenšiu z týchto dĺžok nazývame vzdialenosťou vrcholov u a v a označujeme znakom $\varrho(u, v)$. Ak u a v nesúvisia, hovoríme, že vrcholy u a v majú nekonečnú vzdialenosť a píšeme $\varrho(u, v) = \infty$.

Cvičenie 25. Dokážte, že ak vrcholy u a v súvisia, tak u—v sled najmenšej dĺžky je cestou.

Ľahko sa zistí, že v súvislom grafe pre ľubovoľné vrcholy u, v a w platí:

(19) $\varrho(u, v) \geqq 0$. Pritom $\varrho(u, v) = 0$ práve vtedy, keď $u = v$.
(20) $\varrho(u, v) = \varrho(v, u)$.
(21) $\varrho(u, v) \leqq \varrho(u, w) + \varrho(w, v)$ (tzv. trojuholníková nerovnosť).

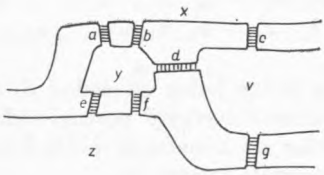
Vidno, že funkcia ϱ (dvoch premenných u, v) má podobné vlastnosti ako vzdialenosť v rovine, či v priestore. Hovoríme, že ϱ je metrika v danom súvislom grafe G, alebo že vrcholová množina V grafu G spolu s funkciou ϱ tvoria metrický priestor. Zvláštnosťou tohto metrického priestoru je fakt, že všetky vzdialenosti sú celými (nezápornými) číslami.

7. Eulerovské ťahy

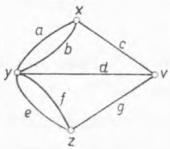
Ak máme daný graf, môže sa stať, že v ňom existuje ťah, ktorý obsahuje všetky prvky (vrcholy i hrany) grafu. Takýto ťah sa nazýva eulerovský. Eulerovský ťah môže byť otvorený alebo uzavretý. Graf, ktorý má uzavretý eulerovský ťah, sa nazýva eulerovský graf.

Uvedené pojmy dostali svoje mená podľa slávneho matematika 18. storočia Leonharda Eulera, ktorý sa nimi zaoberal r. 1736, a tak fakticky napísal prvú prácu z teórie grafov.

Impulzom pre Eulerove výskumy bola v tomto prípade úloha zo zábavnej matematiky, a to známa úloha o 7 mostoch mesta Kráľovca (dnešného Kaliningradu). Za Eulerových čias bolo v Kráľovci 7 mostov a, b, c, d, e, f, g, ktoré spájali brehy x, z rieky Pregel a dva ostrovy y, v na tejto rieke, ako je to naznačené na *obr. 20*. Bolo treba zistiť, či možno prejsť všetky mosty, jeden po druhom tak, aby sa cez žiaden nešlo viackrát.



Obr. 20. Sedem mostov v Kráľovci



Obr. 21. Graf k úlohe o 7 mostoch

Nie je prekvapujúce, že pri riešení tejto úlohy môže byť užitočný graf (*obr. 21*), ktorého vrcholmi sú jednotlivé časti mesta a ktorého hranami sú mosty ich spájajúce.

Ľahko si overíme, že naša úloha je ekvivalentná s úlohou nájsť v grafe z *obr. 21* ťah, ktorý obsahuje všetkých 7 hrán grafu, t. j. eulerovský ťah.

Ak sa v úlohe požaduje, aby sa prechádzka skončila na tom istom mieste, kde sa začala, musíme hľadať uzavretý eulerovský ťah.

Vzniká otázka, ako zistiť, či graf má (uzavretý resp. otvorený) eulerovský ťah. Odpoveď podávajú nasledujúce teorémy 3 a 4. Najprv si však uvedieme dve lemy, ktoré nám budú užitočné pri dôkazoch týchto teorém. Lema 4 je založená na tom, že ak uzavretý ťah prechádza niektorým vrcholom viackrát, tak koľkokrát do tohto vrchola vojde, toľkokrát musí z neho vyjsť. Poznamenajme, že pojem „neslučka" označuje hranu, ktorá nie je slučkou.

Lema 4. Nech je S uzavretý ťah grafu G. Potom pre ľubovoľný vrchol v grafu G platí: v ťahu S existuje párny počet neslučiek incidentných s vrcholom v.

Dôkaz. Ak ťah S obsahuje slučky, utvorme z S nový ťah S' tak, že vynecháme z S všetky usporiadané dvojice (h_i, v_i), kde h_i je slučka a v_i je vrchol v S bezprostredne nasledujúci za h_i. Tým dostaneme nový uzavretý ťah S' bez slučiek. Nech je v ľubovoľný vrchol grafu G. Označme znakom H počet hrán ťahu S' (t. j. počet neslučiek ťahu S) incidentných s vrcholom v a znakom V označme počet výskytov vrchola v v ťahu S'. Rozoznávajme tri prípady:

1. v nepatrí do S'. Potom $H = 0$.

2. v patrí do S', ale nie je krajom ťahu S'. Každá z H uvažovaných hrán sa vyskytuje v S' buď bezprostredne pred v, buď bezprostredne za v. Obrátene, každá z hrán, ktoré v ťahu S' susedia s vrcholom v, je incidentná s v. Keďže S' neobsahuje slučky, tieto hrany sú navzájom rôzne. Preto platí $H = 2V$.

3. v je krajom ťahu S'. V tomto prípade vrchol v pri prvom a poslednom výskyte v S' susedí len s jednou z H uvažovaných hrán, preto $H = 2V - 2$.

Vo všetkých troch prípadoch sme dostali párny počet H, čím je lema dokázaná.

Lema 5. Nech je T otvorený ťah grafu H. Potom pre ľubovoľný vrchol v grafu H platí: V ťahu T existuje nepárny počet neslučiek incidentných s vrcholom v práve vtedy, keď v je krajom ťahu T.

Dôkaz. Nech $T = (u = u_0, h_1, u_1, \ldots, u_n = w)$ je otvorený u—w ťah grafu H. Pridajme ku grafu H novú hranu h spojujúcu vrcholy u a w. Vznikne nový graf G. Konečná postupnosť $S = (u_0, h_1, u_1, \ldots, u_n, h, u_0)$ je uzavretým ťahom grafu G. Podľa lemy 4 pre ľubovoľný vrchol v grafu G platí: V ťahu S existuje párny počet neslučiek incidentných s vrcholom v. Ak v nie je krajom ťahu T, ten istý — teda párny — počet neslučiek incidentných s vrcholom v bude obsahovať aj ťah T. Ak však v je krajom ťahu T, bude T obsahovať o jednu neslučku h menej, teda nepárny počet neslučiek incidentných s vrcholom v. Lema je dokázaná.

V nasledujúcej teoréme treba dokázať, že uvedené tri tvrdenia sú ekvivalentné, t. j. ak platí jedno z nich, tak platia všetky ostatné. Ľahko sa nahliadne, že stačí, keď dokážeme, že z (22) vyplýva (24), z (24) vyplýva (23) a z (23) vyplýva (22).

Teoréma 3. Nech je daný graf G a v ňom vrchol v a hrana h incidentná s v. Nasledujúce tri tvrdenia sú ekvivalentné:

(22) G je eulerovský graf;

(23) G je konečný súvislý graf, v ktorom všetky vrcholy majú párny stupeň;

(24) G má uzavretý eulerovský ťah tvaru $(v, h, \ldots, v)$.

Dôkaz. I. Dokážeme, že z (22) vyplýva (24). Keďže G je eulerovský graf, v G existuje uzavretý eulerovský ťah

$$S = (v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, h_n, v_n = v_0).$$

Ťah S obsahuje všetky hrany grafu G, teda aj hranu h. Nech $h = h_i$, kde $1 \leqq i \leqq n$. Vrcholy v_{i-1} a v_i sú oba konce hrany h. Rozoznávajme dva prípady:

(a) $v = v_{i-1}$. Potom $(v_{i-1}, h_i, v_i, \ldots, v_{n-1}, h_n, v_n = v_0, h_1, v_1, \ldots, v_{i-1})$ je hľadaný uzavretý eulerovský ťah, lebo $v_{i-1} = v$, $h_i = h$.

(b) $v = v_i$. Potom $(v_i, h_i, v_{i-1}, h_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1, h_1, v_0 = v_n, h_n, v_{n-1}, \ldots, v_i)$ je hľadaný ťah.

II. Dokážeme, že z (24) vyplýva (23). Nech má G uzavretý eulerovský ťah $S = (v_0 = v, h_1 = h, v_1, h_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, h_n, v_n = v)$. Zrejme G je konečný súvislý graf. Treba ukázať, že ľubovoľný vrchol u grafu G má párny stupeň. Nech M (resp. N) je počet slučiek (resp. neslučiek) grafu G incidentných s u. Podľa definície stupeň vrchola u sa rovná číslu $2M + N$. Keďže všetky hrany grafu G sú v S, z lemy 4 vyplýva, že N je párne číslo, takže aj stupeň vrchola u je párny.

III. Dokážeme, že z (23) vyplýva (22). Nech je G konečný súvislý graf, v ktorom všetky vrcholy majú párny stupeň. Nech $T = (v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, h_n, v_n)$ je jeden z ťahov najväčšej dĺžky (t. j. obsahujúcich najväčší počet hrán) grafu G. Dokážeme, že T je uzavretý ťah a že T obsahuje všetky hrany grafu G.

Keby T bol otvorený ťah s krajmi v_0 a v_n, podľa lemy 5 by T obsahoval nepárny počet neslučiek incidentných s v_0. Keďže stupeň vrchola v_0 je párny, existovala by aspoň jedna neslučka h incidentná s v_0 a nepatriaca do T. Nech je u druhý koniec hrany h. Potom $(u, h, v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \ldots, v_n)$ by bol ťahom väčšej dĺžky než dĺžka ťahu T, čo je spor. Teda ťah T musí byť uzavretý.

Nech existuje hrana g, ktorá nepatrí do T. Nech v a w sú konce hrany g. Nech u_i je jeden z vrcholov ťahu T, ktoré majú najmenšiu vzdialenosť m

od vrchola v. Ak $m \geqq 1$, nech $(x_0 = u_i, g_1, x_1, g_2, x_2, \ldots, x_m = v)$ je najkratší sled (cesta) z u_i do v. Potom $(u_i, h_{i+1}, u_{i+1}, \ldots, u_n = u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \ldots, u_i, g_1, x_1, g_2, x_2, \ldots, x_m)$ je ťah dĺžky väčšej než dĺžka ťahu T, čo je spor.

Ak $m = 0$, tak vrchol $v = u_i$ leží na ťahu T. Potom $(u_i, h_{i+1}, u_{i+1}, \ldots, u_n = u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \ldots, u_i = v, g, w)$ je ťah, ktorý má dĺžku väčšiu než mal ťah T, čo je opäť spor.

Teoréma je dokázaná.

Cvičenie 26. Predpoklady teorémy 3 požadujú, aby graf G mal aspoň jeden vrchol a jednu hranu. Zistite, či podmienky (22) a (23) sú ekvivalentné, ak: a) G je prázdny graf; b) G nemá žiadne hrany, ale má aspoň jeden vrchol.

Teoréma 4. Nech je H graf a u, v jeho dva rôzne vrcholy. Ekvivalentné sú tieto dve tvrdenia:

(25) Graf H má otvorený eulerovský u—v ťah.

(26) H je konečný súvislý graf, v ktorom vrcholy u a v majú nepárny stupeň a všetky ostatné vrcholy majú párny stupeň.

Dôkaz. Utvorme z grafu H graf G, a to tak, že pridáme k nemu novú hranu h s koncami u a v.

I. Predpokladajme, že v H existuje otvorený eulerovský ťah $(u = v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, h_n, v_n = v)$. Potom v G existuje uzavretý eulerovský ťah $(v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, h_n, v_n, h, v_0)$. Podľa teorémy 3 všetky vrcholy v G majú párny stupeň. Preto všetky vrcholy v H okrem u a v majú párny stupeň a vrcholy u a v majú v H nepárny stupeň.

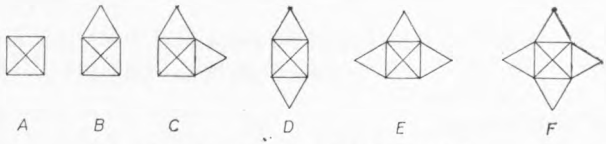
II. Predpokladajme, že platí (26). Preto všetky vrcholy v G majú párny stupeň. Zrejme G je konečný súvislý graf. Podľa teorémy 3 G má uzavretý eulerovský ťah tvaru $(v, h, u_0, g_1, u_1, g_2, u_2, \ldots, u_{n-1}, g_n, u_n = v)$. Zrejme $u_0 = u$. Preto H má otvorený eulerovský ťah $(u_0 = u, g_1, u_1, g_2, u_2, \ldots, u_{n-1}, g_n, u_n = v)$.

Teoréma je dokázaná.

Teraz sa môžeme vrátiť k našej úlohe o 7 kráľoveckých mostoch. Úlohu sme redukovali na problém, či graf z *obr. 21* má eulerovský ťah. Vidíme, že tento graf má všetky 4 vrcholy nepárneho stupňa. Podľa teorémy 3 nemá uzavretý eulerovský ťah; podľa teorémy 4 nemá ani otvorený eulerovský ťah. Preto je úloha o kráľoveckých mostoch neriešiteľná.

Všimnime si, že ak graf má eulerovský ťah, to vlastne znamená, že jeho diagram možno nakresliť jediným ťahom (pera alebo ceruzky). Preto teorémy 3 a 4 možno použiť aj na riešenie úloh o nakreslení obrázkov jedným ťahom (pritom nie je dovolené ísť po tej istej čiare dvakrát). Stačí obrázky považovať za diagramy grafov.

Cvičenie 27. Ktoré z útvarov z *obr. 22* možno nakresliť jediným a) otvoreným ťahom; b) uzavretým ťahom?

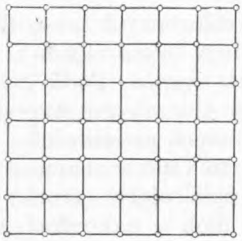


Obr. 22. Ilustrácia k cvičeniu 27

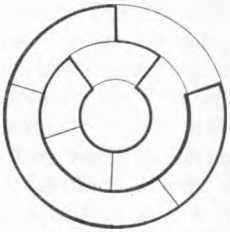
Videli sme, že nie každý diagram grafu možno nakresliť jedným ťahom. Vzniká preto otázka, kedy možno daný diagram nakresliť dvoma alebo troma ťahmi a pod. Pritom tieto ťahy môžu mať spoločné vrcholy, ale nesmú mať spoločné hrany. Miesto toho, že diagram grafu kreslíme pomocou ťahov, budeme tiež hovoriť, že graf rozkladáme na tieto ťahy. Ľahko zistíme, že graf z *obr. 21* možno rozložiť na dva otvorené ťahy. Všeobecné tvrdenie vyslovil r. 1848 J. B. Listing a dokázal ho r. 1882 E. Lucas: Nech konečný súvislý graf G má práve $2p$ (pričom p je prirodzené číslo) vrcholov nepárneho stupňa. Potom graf G možno rozložiť na p otvorených ťahov a nemožno ho rozložiť na menší počet ťahov. (Pripomeňme si, že podľa dôsledku 2 teorémy 1 každý konečný graf má párny počet vrcholov nepárneho stupňa.) Listingovo tvrdenie možno dokázať podobnou metódou ako teorému 4 (vhodným doplnením grafu p novými hranami na eulerovský graf a použitím teorémy 3).

Cvičenie 28. Zistite, na aký najmenší počet ťahov možno rozložiť konečný graf, ktorý má práve $2p$ vrcholov nepárneho stupňa a práve r komponentov neobsahujúcich vrcholy nepárneho stupňa.

Cvičenie 29. Zistite, na aký najmenší počet ťahov možno rozložiť graf z *obr. 23.*



Obr. 23. Graf k cvičeniam 29, 31 a 36

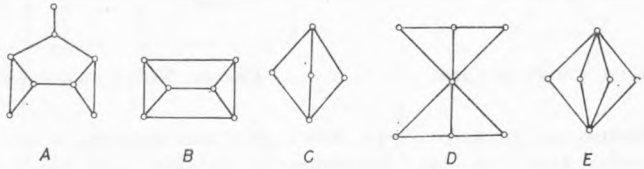


Obr. 24. Graf pravidelného dvanásťstena

8. Hamiltonovské kružnice a cesty

Doteraz sme skúmali ťahy obsahujúce všetky vrcholy i hrany grafu. Teraz si úlohu trocha obmeníme; nebudeme požadovať, aby ťah obsahoval všetky hrany grafu, ale sprísnime podmienky pre vrcholy: cez žiaden vrchol nesmie ísť ťah viac než raz. Budeme teda skúmať cesty a kružnice, ktoré obsahujú všetky vrcholy daného grafu; nazývajú sa hamiltonovské cesty a hamiltonovské kružnice na počesť slávneho írskeho matematika W. R. Hamiltona (1805—1865), ktorý ich študoval na grafe pravidelného dvanásťstena (*obr. 24*, kde je jedna z hamiltonovských kružníc vyznačená silnou čiarou; začiatok a „smer obiehania" po nej si môžeme zvoliť ľubovoľne). Graf, ktorý má aspoň jednu hamiltonovskú kružnicu, sa nazýva hamiltonovský.

Hamilton vymyslel pojem hamiltonovskej kružnice pôvodne pre svoju hru „cesta okolo sveta". Vrcholy mnohostena (teda i nášho grafu) zodpovedali význačným mestám sveta, hrany cestám medzi nimi. Dá sa ukázať, že prvé štyri hrany hamiltonovskej kružnice v tomto grafe si môžeme ľubovoľne predpísať (stačí, aby tvorili cestu dĺžky 4). Piata hrana však už je v niektorých prípadoch jednoznačne určená.



Obr. 25. Grafy k cvičeniu 30

Cvičenie 30. Zistite, ktoré z grafov znázornených na *obr. 25* majú a) hamiltonovskú kružnicu; b) hamiltonovskú cestu.

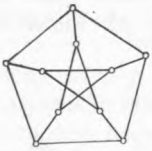
Vzniká otázka, ako sa dá zistiť, či daný graf má hamiltonovskú kružnicu, resp. cestu. Nájsť na to nutnú a postačujúcu podmienku toho druhu, ako sme uviedli v teorémach 3 a 4 pre eulerovské ťahy, sa doteraz nepodarilo. Sú však známe niektoré nutné a niektoré postačujúce podmienky pre to, aby graf bol hamiltonovský (t. j. mal hamiltonovskú kružnicu). Napr. hamiltonovský graf musí byť súvislý, všetky jeho vrcholy musia mať stupeň aspoň dva, nesmie obsahovať most ani artikuláciu. Vo všeobecnosti hamiltonovský graf nesmie mať taký vrcholový rez, že ak vynecháme z grafu jeho vrcholy (a hrany s nimi incidentné), vznikne graf s väčším počtom komponentov než bol počet vynechaných vrcholov (napr. grafy *D* a *E* z *obr. 25*). Uvedené podmienky však nie sú postačujúce, ako ukazujú grafy z *obr. 26* (tzv. Petersenov graf) a *27*, ktoré nie sú hamiltonovské.

Uveďme si prehľad najjednoduchších metód, pomocou ktorých možno o danom grafe dokázať, že je nehamiltonovský:

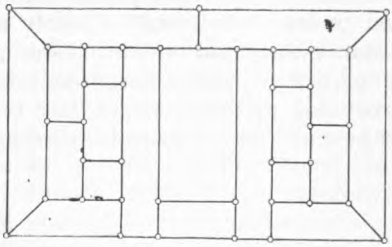
1. Dokážeme, že graf nespĺňa niektorú z nutných podmienok pre to, aby bol hamiltonovský (napr. dokážeme, že graf obsahuje most, alebo artikuláciu, alebo vrchol stupňa 1).

2. Zvolíme určitý vrchol a systematicky preskúšame všetky možnosti ako by mohla prebiehať hamiltonovská kružnica začínajúca v tomto vrchole. Pritom, ak je to možné, využívame prípadné symetrie grafu alebo jeho diagramu. (Túto metódu možno použiť napr. pre Petersenov graf.)

3. Rozložíme graf na menšie časti — podgrafy a skúmame, či cesty existujúce v týchto podgrafoch môžeme na seba naviazať tak, aby vznikla hamiltonovská kružnica. (Túto metódu možno použiť napr. pre graf z *obr. 27*.)



Obr. 26. Petersenov graf



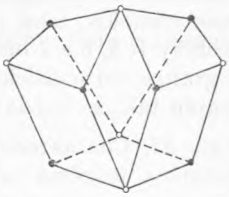
Obr. 27. Nehamiltonovský graf

4. Použijeme iný princíp. Napr. keby graf mnohostena z *obr. 28* mal hamiltonovskú kružnicu, táto kružnica by musela mať nepárny počet (a to 11) vrcholov. Preskúmaním obrázku však ľahko zistíme, že v hamiltonovskej kružnici by sa museli striedať vrcholy na diagrame zakreslené plnými a prázdnymi krúžkami, čo je pri nepárnom počte vrcholov grafu vylúčené. Hlbší pohľad na tento príklad nám poskytne štúdium párnych grafov v nasledujúcom paragrafe (teoréma 5). Pre zaujímavosť ešte poznamenajme, že mnohosten z *obr. 28* je najmenší čo do počtu vrcholov (11), hrán (18) i stien (9), ktorého graf nemá hamiltonovskú kružnicu, ako dokázal r. 1970 slovenský matematik E. Jucovič. Uvedený princíp môžeme využiť aj pri riešení ďalších dvoch cvičení.

Cvičenie 31. Má graf z *obr. 23* a) hamiltonovskú kružnicu; b) hamiltonovskú cestu?

Cvičenie 32. Jazdec na šachovnici tvaru $n \times n$ má prejsť všetkých n^2 polí a vrátiť sa na pole, z ktorého vyšiel. Pritom cez každé pole šachovnice môže prejsť len raz. Pre aké prirodzené číslo n je to možné? (Návod: Zostrojte graf, ktorého vrcholy odpovedajú poliam šachovnice a hrany skokom jazdca.)

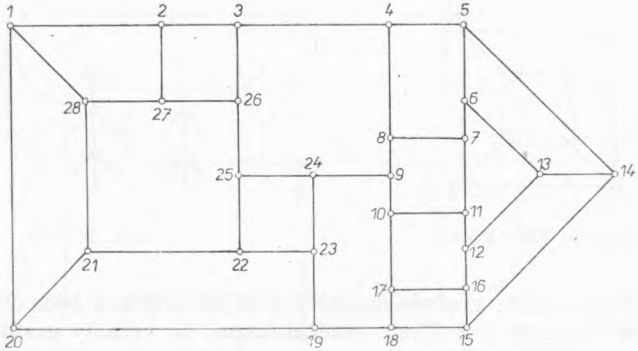
V poslednom čase sa veľká pozornosť venuje skúmaniu hamiltonovských kružníc v pravidelných grafoch stupňa 3. Tieto otázky súvisia s niektorými známymi matematickými problémami (napr. s doteraz nevyriešeným problémom štyroch farieb: či možno štáty každej geografickej mapy zafarbiť 4 farbami tak, aby susedné štáty mali vždy rôznu farbu), ale aj s otázkami iných vied (napr. hamiltonovské grafy tretieho stupňa použil americký vedec J. Lederberg pri klasifikácii cyklických zlúčenín, s ktorými sa stretávame v organickej chémii — s trochu inými aplikáciami na organickú chémiu sa budeme zaoberať v nasledujúcom paragrafe).



Obr. 28. Minimálny nehamiltonovský mnohosten

Cvičenie 33. Graf, ktorého diagram je na *obr. 29*, má hranu, ktorá neleží v žiadnej hamiltonovskej kružnici. Nájdite túto hranu!

Cvičenie 34. Vyšetrite, pre ktoré prirodzené číslo n je kompletný graf s n vrcholmi a) eulerovský; b) hamiltonovský.



Obr. 29. Hamiltonovský graf s jedinou hranou nepatriacou do žiadnej hamiltonovskej kružnice

9. Chromatické číslo grafu, párne grafy, lesy, stromy a kostry grafu. Aplikácie v chémii

Všimnime si, že graf kocky (*obr. 30*) má iba kružnice dĺžky 4, 6 a 8. Grafy, ktoré majú len kružnice párnej dĺžky, nazývame párne.

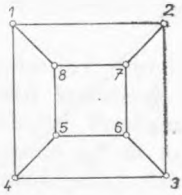
Majme daný graf bez slučiek a uvažujme, koľko farieb potrebujeme na to, aby sme zafarbili vrcholy grafu regulárne, t. j. tak, aby konce každej hrany mali vždy rôznu farbu. Najmenší takýto počet farieb sa nazýva chromatickým číslom grafu. Chromatické číslo grafu so slučkami nedefinujeme. Ľahko zistíme, že chromatické číslo grafu kocky je 2, t. j. na regulárne zafarbenie vrcholov, nám postačia dve farby, povedzme zelená a červená; napr. vrcholy 1, 3, 5 a 7 budú zelené, vrcholy 2, 4, 6 a 8 červené. Všeobecne vrcholy grafu s chromatickým číslom 2 sa dajú rozložiť do dvoch disjunktných skupín tak, že každá hrana spojuje vrcholy rôznych farieb.

Cvičenie 35. Charakterizujte grafy s chromatickým číslom a) 0; b) 1.

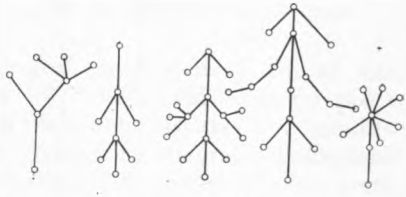
Nasledujúca teoréma podáva charakterizáciu grafov s chromatickým číslom 2:

Teoréma 5. Graf G má chromatické číslo 2 práve vtedy, keď G je párny graf obsahujúci aspoň jednu hranu.

Dôkaz. I. Nech má graf G chromatické číslo 2. Zrejme G obsahuje aspoň jednu hranu (inak by mal chromatické číslo 1 alebo 0). Keby G nebol párny graf, G by obsahoval kružnicu nepárnej dĺžky. Jej vrcholy však zrejme nemožno zafarbiť regulárne 2 farbami, teda G by mal chromatické číslo väčšie než 2, čo je spor.



Obr. 30. Graf kocky



Obr. 31. Les

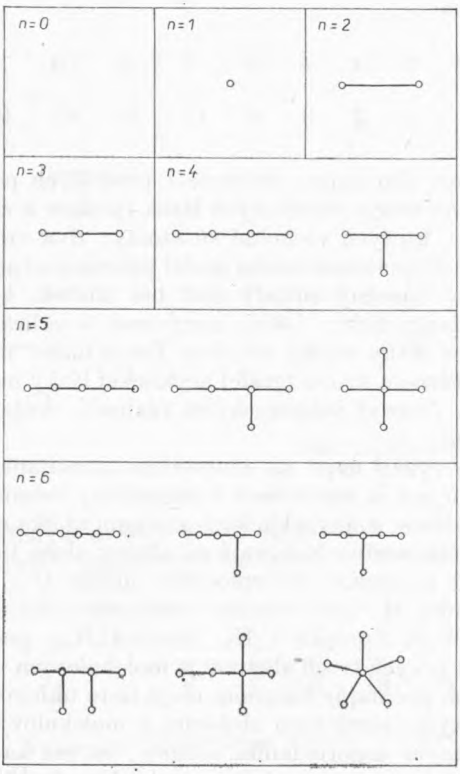
II. Nech je G párny graf obsahujúci aspoň jednu hranu; teda chromatické číslo grafu G je aspoň 2. Preto stačí dokázať, že vrcholy grafu G možno regulárne zafarbiť 2 farbami. Zvoľme v každom komponente grafu G pevne jeden vrchol. Všetky vrcholy tohto komponentu, ktoré majú od zvoleného vrcholu párnu vzdialenosť (teda aj samotný zvolený vrchol) zafarbime zelenou farbou, a vrcholy, ktoré majú od zvoleného vrchola nepárnu vzdialenosť, zafarbime červene. Dokážeme, že vzniklo regulárne zafarbenie. Skutočne, keby dva vrcholy u a v tej istej farby boli susedné, mali by od zvoleného vrcholu w buď oba párnu alebo oba nepárnu vzdialenosť. V každom prípade najkratší u—v sled, najkratší v—w sled a najkratší w—u sled by tvorili uzavretý sled nepárnej dĺžky. Podľa lemy 3 z neho by sa dala

utvoriť kružnica grafu G nepárnej dĺžky, čo odporuje predpokladu, že G je párny graf.

Teoréma je dokázaná.

Cvičenie 36. Dokážte, že grafy z *obr. 23* a *28* sú párne.

Cvičenie 37. Dokážte, že ku každému prirodzenému číslu n existuje graf s chromatickým číslom n.



Obr. 32. Stromy s $n \leqq 6$ vrcholmi

Párne grafy sme definovali ako grafy, v ktorých všetky kružnice majú párnu dĺžku. Táto podmienka je, samozrejme, splnená, ak graf nemá žiadne kružnice. Graf, ktorý nemá kružnice, sa nazýva les alebo acyklický graf. Príklad na diagram lesa je na *obr. 31.* Zrejme les nemôže obsahovať slučky ani násobné hrany.

Súvislý acyklický graf, t. j. súvislý les sa nazýva strom. Ľahko si možno overiť, že každý komponent lesa je stromom. Napr. les z *obr. 31* má 5 komponentov — stromov.

Na *obr. 32* sú diagramy všetkých neizomorfných stromov s menej než 7 vrcholmi. Vidíme, že ich je 15. Jedným z nich je prázdny graf.

Keby sme sa pokúsili nakresliť diagramy všetkých neizomorfných stromov so 7, 8, 9 a 10 vrcholmi, zistili by sme, že ich počet rýchlo vzrastá. Počet t_n neizomorfných stromov s n vrcholmi pre „malé" n ukazuje nasledujúca tabuľka:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t_n	1	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106	235	551

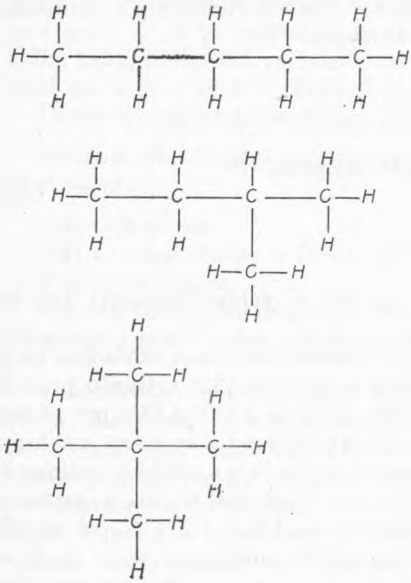
Teraz si ukážeme, ako možno niektoré z predošlých pojmov aplikovať v chémii. Štruktúrne vzorce chemických látok (prvkov a zlúčenín) budeme považovať za grafy, ktorých vrcholmi sú atómy; dva vrcholy sú spojené toľkými hranami, koľkonásobná väzba medzi príslušnými atómami existuje. Vznikne neprázdny konečný súvislý graf bez slučiek, ktorý zodpovedá stavbe molekuly danej látky. Látku nazývame acyklickou, ak jej graf neobsahuje kružnice dĺžky väčšej než dva. Tento názov možno odôvodniť tým, že ak v štruktúrnom vzorci (grafe) acyklickej látky nahradíme všetky viacnásobné väzby (hrany) jednoduchými väzbami, dostaneme acyklický graf (dokonca strom).

Stromy môžeme využiť napr. na enumeráciu (spočítanie) najjednoduchších zlúčenín, s ktorými sa stretávame v organickej chémii — acyklických nasýtených uhľovodíkov, t. j. acyklických zlúčenín uhlíka a vodíka obsahujúcich len jednoduché väzby. Nazývajú sa alkány alebo tiež parafíny. Ich molekuly obsahujú n atómov štvormocného uhlíka C a $2n + 2$ atómov jednomocného vodíka H. Tým vznikne uhľovodík alkán C_nH_{2n+2}, napr. metán CH_4, etán C_2H_6, propán C_3H_8, bután C_4H_{10}, pentán C_5H_{12} atď. Zatiaľ čo štruktúra prvých troch alkánov je molekulovým vzorcom C_nH_{2n+2} jednoznačne určená, počínajúc butánom majú tieto uhľovodíky izoméry — zlúčeniny s rovnakým chemickým zložením a molekulovým vzorcom, ale s rôznym štruktúrnym usporiadaním atómov, čo má za následok rôzne fyzikálne a chemické vlastnosti týchto látok. Na *obr. 33* sú znázornené 3 izoméry pentánu C_5H_{12}.

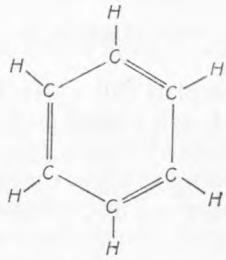
Pre úplnosť poznamenajme, že sa môže stať, že dve rôzne chemické látky majú nielen rovnaký molekulový, ale aj štruktúrny vzorec a líšia sa len priestorovou stavbou molekúl. Táto, tzv. priestorová izoméria sa však vyskytuje zriedkavejšie, preto sa ňou nebudeme zaoberať.

Štruktúra alkánov je jednoznačne daná nielen ich celými štruktúrnymi vzorcami, ale už vzájomnými väzbami atómov uhlíka, ktoré majú (rovnako

ako celé štruktúrne vzorce) tvar stromu. Preto teoreticky možných alkánov s n atómami uhlíka je nanajvýš toľko, koľko je neizomorfných stromov s n vrcholmi. Nie každému stromu však zodpovedá alkán; pretože uhlík je štvormocný, nemôžu mať použité stromy vrcholy stupňa väčšieho než 4.



◄ *Obr. 33.* Izoméry pentánu



Obr. 34. Štruktúrny vzorec benzénu

Nasledujúca tabuľka uvádza počet a_n alkánov s n atómami uhlíka, t.j. počet neizomorfných stromov s n vrcholmi neobsahujúcich vrcholy stupňa väčšieho než 4.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	1	1	2	3	5	9	18	35	75	159	355

Cvičenie 38. Nakreslite štruktúrne vzorce všetkých izomérov hexánu (t. j. alkánu C_6H_{14}).

Počet izomérov s daným molekulovým vzorcom môžeme hľadať pomocou teórie grafov aj v zložitejších prípadoch. Môžeme napr. skúmať látky, ktorých štruktúrny vzorec obsahuje cykly (t. j. ich graf má n-uholníky kde $n > 2$); môžeme vyšetrovať zlúčeniny viac než dvoch prvkov a látky s viacnásobnými väzbami. Uveďme len malú ukážku na poslednú z týchto možností:

Cvičenie 39. Najznámejšou cyklickou organickou zlúčeninou je benzén C_6H_6 (*obr. 34*). Zistite, koľko má benzén acyklických izomérov (popri jednoduchých aj dvojité a trojité väzby medzi atómami uhlíka sú prípustné)!

Stromy možno charakterizovať rôznymi spôsobmi. Niektoré z nich nám poskytuje nasledujúca teoréma.

Teoréma 6. Nech je G konečný neprázdny graf s n vrcholmi a m hranami. Potom sú ekvivalentné nasledujúce 3 tvrdenia:

(27) G je strom.
(28) G je súvislý graf a platí $n = m + 1$.
(29) G je acyklický graf a platí $n = m + 1$.

Dôkaz. Uvažujme nasledujúce 3 vlastnosti grafu G:

(30) G je súvislý.
(31) G je acyklický.
(32) V G platí $n = m + 1$.

Zrejme stačí dokázať, že ak graf G má dve z týchto vlastností, tak má aj tretiu.

I. Nech platí (30) a (31). Vzťah (32) dokážeme indukciou vzhľadom na n. Ak $n = 1$, tak vzhľadom na (31) platí $m = 0$, teda (32) v tomto prípade platí. Predpokladajme, že $n > 1$ a že (32) vyplýva z (30) a (31) pre všetky grafy s počtom vrcholov menším než n. Nech graf G má n vrcholov a m hrán. Vynechajme z G jednu hranu; označme jej konce u a v. Ľahko zistíme, že vznikne graf s dvoma komponentmi G_u a G_v. Nech graf G_u má n_1 vrcholov a m_1 hrán; nech graf G_v má n_2 vrcholov a m_2 hrán. G_u a G_v sú súvislé acyklické grafy. Podľa indukčného predpokladu platí $n_1 = m_1 + 1$, $n_2 = m_2 + 1$, takže $n = n_1 + n_2 = m_1 + m_2 + 2 = m + 1$, čo sme mali dokázať.

II. Nech platí (31) a (32). G je acyklický graf; nech k je počet komponentov grafu G. Každý z nich je acyklický súvislý graf. Podľa I. časti dôkazu každý z týchto grafov má počet vrcholov o 1 väčší než počet hrán. Keďže G má k komponentov, platí $n = m + k$. Ale podľa predpokladu $n = m + 1$, takže $k = 1$ a graf G je súvislý.

III. Nech platí (30) a (32). Pripusťme, že graf G má kružnicu $K = (v_0, h_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, h_n, v_n = v_0)$. Nech u je ľubovoľný vrchol grafu G. Označme znakom $M(u)$ množinu všetkých sledov grafu G, ktorých začiatkom je u a ktorých koniec leží na kružnici K. Zo súvislosti grafu G vyplýva, že množina $M(u)$ je neprázdna. Nech $S(u)$ je sled najmenšej dĺžky zo všetkých sledov množiny $M(u)$. Ak vrchol u neleží na K, sled $S(u)$ má aspoň jednu hranu. Označme znakom $h(u)$ prvú hranu sledu $S(u)$. Ak u leží na K, a to $u = v_i$, položme $h(u) = h_i$. Tým sme každému vrcholu u grafu G priradili hranu $h(u)$ grafu G. Pripusťme, že dvom rôznym vrcholom u, v bola priradená tá istá hrana $h = h(u) = h(v)$. Zrejme u ani v nemôže ležať na K

a u, v sú konce hrany h. Sledy $S(u)$ a $S(v)$ majú potom tvar $S(u) = (u, h, v, \ldots, x)$, $S(v) = (v, h, u, \ldots, y)$, pričom x a y sú vrcholy ležiace na K. Vynechaním prvého vrchola a prvej hrany z $S(u)$ a $S(v)$ vzniknú sledy $S'(u) = (v, \ldots, x)$, $S'(v) = (u, \ldots, y)$. Zrejme $S'(u) \in M(v)$, $S'(v) \in M(u)$. Ľahko zistíme, že buď je sled $S'(u)$ kratší než $S(v)$, alebo je sled $S'(v)$ kratší než $S(u)$, čo odporuje spôsobu voľby $S(u)$ a $S(v)$. Preto dvom rôznym vrcholom grafu G sú priradené vždy dve rôzne hrany. Graf G má teda aspoň toľko hrán, koľko má vrcholov, takže $m \geqq n$. To je však v spore s predpokladom, že $n = m + 1$. Teda G nemôže mať kružnicu a platí (31).

Ďalšie charakterizácie stromu podáva nasledujúce cvičenie.

Cvičenie 40. Dokážte, že pre ľubovoľný graf G sú nasledujúce 3 tvrdenia ekvivalentné:

(33) G je strom.

(34) G nemá slučky a ľubovoľné dva vrcholy u, v sú v G spojené práve jednou u—v cestou.

(35) Ak ľubovoľné dva vrcholy v G spojíme novou hranou, vznikne graf obsahujúci práve jeden mnohouholník.

V mnohých situáciách hrajú význačnú úlohu stromy, ktoré sú faktormi grafu. Nazývame ich kostrami. Kostra daného grafu môže byť teda definovaná napr. ako jeho súvislý podgraf, ktorý nemá kružnice a ktorý obsahuje jeho všetky vrcholy. Aby sme naznačili význam tohto pojmu, predstavme si, že chceme vybudovať medzi určitými miestami dopravu (napr. leteckú) s najmenším počtom liniek, ale tak, aby sme sa z každého miesta mohli dostať do všetkých ostatných miest. Zrejme si musíme vybrať niektorú kostru grafu všetkých možných (leteckých) liniek medzi danými miestami.

Cvičenie 41. Určte počet kostier kompletného grafu s a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4 vrcholmi.

Prirodzene, jeden graf nielenže môže mať viac kostier, ale nemusí mať ani jednu — tento prípad nastáva práve vtedy, keď graf je nesúvislý. Naproti tomu každý súvislý graf má aspoň jednu kostru. Pre konečné grafy je dôkaz tohto tvrdenia veľmi jednoduchý: z grafu vynechávame hrany patriace do kružníc, jednu po druhej, tak dlho, kým graf obsahuje kružnicu. Zrejme po konečnom počte krokov tento postup musí skončiť. Vtedy dostaneme súvislý graf bez kružníc, teda kostru.

Ak uvažujeme o tom, ktorý z obyčajných grafov (t. j. grafov bez slučiek a násobných hrán) má najväčší počet kostier, ľahko zistíme, že je to práve kompletný graf. Možno dokázať, že kompletný graf s n vrcholmi (kde n je prirodzené číslo väčšie než 1) má práve n^{n-2} kostier. Jestvuje niekoľko dôkazov tohto vzorca, ktorý dostal meno po A. Cayleyovi, ktorý ho objavil r. 1889; všetky sú však pomerne zložité, preto ich neuvádzame.

20. Je to 8 sledov: (1, a, 5, a, 1, a, 5), (1, a, 5, a, 1, i, 9), (1, a, 5, e, 9, e, 5), (1, a, 5, e, 9, i, 1), (1, i, 9, e, 5, a, 1), (1, i, 9, e, 5, e, 9), (1, i, 9, i, 1, a, 5), (1, i, 9, i, 1, i, 9).

21. (8) a (10) platí, (9) neplatí.

22. Štyri. Prvý z nich je $G_1 = \{1, 5, 9\} = G_5 = G_9$, druhý $G_2 = \{2, 6, 10\} = G_6 = G_{10}$, tretí $G_3 = \{3, 7, 11\} = G_7 = G_{11}$, štvrtý $G_4 = \{4, 8, 12\} = G_8 = G_{12}$.

23. a) 12. b) 24. c) 24. d) 24. e) 0. f) 36. g) 48.

24. a) Nie. b) Áno, ak ťah nemá dĺžku 0.

25. Keby najkratší u—v sled $S = (u_0 = u, h_1, u_1, h_2, u_2, \ldots, u_{n-1}, h_n, u_n = v)$ nebol cestou, niektoré dva z vrcholov $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n$ by sa rovnali. Ak však $u_i = u_j$, kde $0 \leqq i < j \leqq n$, tak $(u_0 = u, h_1, u_1, h_2, u_2, \ldots, u_{i-1}, h_i, u_i = u_j, h_{j+1}, u_{j+1}, \ldots, u_{n-1}, h_n, u_n)$ je sled dĺžky menšej než dĺžka sledu S, čo je spor.

26. a) Nie. b) Áno.

27. a) B, C a E. b) D.

28. $p + r$ ťahov, z toho p otvorených a r uzavretých.

29. 10 (otvorených) ťahov.

30. a) B. b) A, B, C a D.

31. a) Nie. b) Áno.

32. Pre párne $n \geqq 6$. (Nepárne n sa vylúčia na základe predošlého princípu, $n = 2$ a $n = 4$ preskúmaním príslušného grafu. Pre párne $n \geqq 6$ sa tvrdenie dokáže osobitnou konštrukciou.)

33. Je to hrana spojujúca vrcholy 22 a 25. (Pre ostatných 41 hrán grafu možno ľahko zostrojiť hamiltonovskú kružnicu, ktorá touto hranou prechádza. Pre 28 hrán je takáto hamiltonovská kružnica naznačená už na obrázku. Prechádza postupne vrcholmi 1, 2, 3, ..., 27, 28, 1. Najťažšie je dokázať, že cez hranu 22—25 neprechádza žiadna hamiltonovská kružnica. Najvhodnejšie je tu použiť metódu rozkladu grafu na časti.)

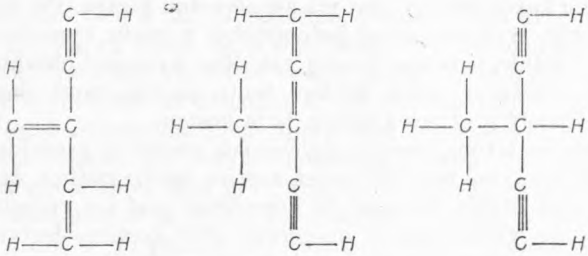
34. a) Ak n je nepárne. b) Ak $n \geqq 3$.

35. a) Prázdny graf. b) Neprázdne grafy, v ktorých všetky vrcholy majú stupeň 0.

36. Stačí použiť teorému 5.

37. Stačí vziať kompletný graf s n vrcholmi.

38. Stačí použiť 5 stromov so 6 vrcholmi neobsahujúcich vrchol stupňa väčšieho než 4 znázornených na *obr. 32*. Im zodpovedajú väzby uhlíkových atómov v 5 izoméroch hexánu.



Obr. 35. Izoméry benzénu

39. 15 acyklických izomérov. Z nich 12 má cestu obsahujúcu 6 atómov uhlíka; väzbami týchto atómov je už uhľovodík jednoznačne určený. Ľahko si vypočítame, že medzi uhlíkovými atómami musí byť 9 väzieb. Sú tieto možnosti:

C≡C—C≡C—C—C	C=C=C=C=C—C
C≡C—C=C=C—C	C=C=C=C—C=C
C≡C—C=C—C=C	C=C=C—C≡C—C
C≡C—C—C≡C—C	C=C=C—C=C=C
C≡C—C—C=C=C	C=C—C≡C—C=C
C≡C—C—C—C≡C	C—C≡C—C≡C—C

Zvyšné 3 acyklické izoméry benzénu sú na *obr. 35.*

40. Náčrt dôkazu: I. Z (33) vyplýva (34). Toto tvrdenie je založené na tom, že ak medzi dvoma vrcholmi grafu G existujú dve rôzne cesty, tak G má kružnicu dĺžky aspoň 2. II. Z (34) vyplýva (35). Skutočne, z (34) zrejme vyplýva, že G je acyklický graf. Preto ak spojíme v G dva vrcholy u a v novou hranou h, vznikne graf H, v ktorom všetky mnohouholníky obsahujú h. Preto graf H má práve toľko mnohouholníkov, koľko mal graf G u—v ciest. III. Z (35) vyplýva (33). Z (35) sa ľahko dokáže, že G je acyklický graf. Preto stačí dokázať, že ľubovoľné dva vrcholy u a v grafu G sú spojené u—v cestou. Spojme vrcholy u a v novou hranou h. Vznikne graf s mnohouholníkom; tento mnohouholník obsahuje hranu h s koncami u a v. Preto v G existuje u—v cesta.

41. a) 1. b) 1. c) 1. d) 3. e) 16.