MATEMATICKÉ OBZORY 11/1977

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE V RÁMCI DĚJIN MATEMATIKY

OTAKAR BORŮVKA, Brno

Plenární přednáška na Konferenci československých matematiků Ostrava 1974

1. Úvod

Vznik a vývoj teorie diferenciálních rovnic obyčejných i parciálních je organickou částí pokroku matematiky. Od svých prvních počátků, které jsou spjaty s objevem infinitesimálního počtu v osmdesátých letech 17. století, až do současné doby, pokračuje vývoj teorie diferenciálních rovnic v úzké souvislosti s jinými obory matematiky a s rozvojem přírodních věd. Z těchto pramenů přijímá teorie diferenciálních rovnic nové podněty a metody, a naopak svými problémy a výsledky ovlivňuje pokrok přírodovědeckého poznání. Vývoj teorie diferenciálních rovnic postupoval od diferenciálních rovnic obyčejných, o nichž znalosti již v padesátých letech 18. století mají znaky ucelené teorie, k diferenciálním rovnicím parciálním, jejichž systematické studium v oné době teprve začíná. 19. století prináší rozhodující pokrok klasické teorie diferenciálních rovnic jako samostatného oboru matematiky.

V této přednášce popíši podrobněji některá období tohoto vývoje, hlavně pokud jde o diferenciální rovnice obyčejné, v souvislosti s historickými událostmi ve vývoji matematiky a s životními daty a vědeckým dílem některých klasiků a jejich pokračovatelů, kteří se o vývoj teorie diferenciálních rovnic podstatně zasloužili.

2. 17. a 18. století

Diferenciální rovnice obyčejné. Počátky teorie diferenciálních rovnic jsou v úzké souvislosti s objevem infinitesimálního počtu G. W. LEIBNIZEM (1646—1716) a I. NEWTONEM (1643—1727). První Leibnizovo pojednání věnované „novému počtu" vyšlo v r. 1684 v Acta eruditorum v Lipsku. Je všeobecně známo, že základy tohoto počtu jsou odrazem jednoduchých geometrických a fyzikálních jevů závislých na jedné neodvisle proměnné, zejména pojmu směrnice tečny křivky a okamžité rychlosti pohybu. V této souvislosti je již autoři infinitesimálního počtu a jejich první žáci setkali s obyčejnými diferenciálními rovnicemi rozmanitých druhů, jakožto zápisy a — po obsahové stránce — ekvivalenty geometrických a fyzikálních problémů. K řešení těchto rovnic byly hledány a nalezeny metody přizpůsobené jednotlivým případům. S rostoucím počtem poznatků o jednotlivostech vystupovaly do popředí rozmanité typy diferenciálních rovnic, především prvního řádu, a metody jejich řešení. Vznikala teorie, kterou dnes označujeme jako elementární metody integrace obyčejných diferenciálních rovnic, tehdy ovšem teorie nedokonalá s nevytříbenými pojmy a mezerami, zejména v otázkách existenčních. Poznamenejme, že sám pojem funkce jedné proměnné procházel od objemu analytické geometrie R. DESCARTESEM (1596—1650) a P. FERMATEM (1601—1665) dlouhým vývojem a že moderní označení $f(x)$ se vyskytuje teprve v pracích EULEROVÝCH a CLAIRAUTOVÝCH kolem poloviny 18. století.

Všimněme si podrobněji hlavních matematických výkonů z tohoto prvního období, které podstatně ovlivnily pokrok teorie obyčejných diferenciálních rovnic a patří k základům i moderních teorií v tomto směru.

Již v r. 1691 zavádí JAN BERNOULLI pojem integračního faktoru, jehož teorii později vypracoval EULER v souvislosti s podmínkami integrability. Týž Jan BERNOULLI užívá již v r. 1693 metody variace konstatnt. V r. 1724 dochází J. P. RICCATI (1676—1754) k proslulé rovnici nesoucí jeho jméno. V r. 1750 EULER integruje diferenciální lineární rovnice s konstantními koeficienty. J. L. d'ALEMBERT (1717—1783) užívá k integraci diferenciálních rovnic ekvivalentních systémů. Řada vynikajících matematiků, zejména B. TAYLOR (1685—1731), CLAIRAUT, EULER, P. S. LAPLACE (1749—1827), učitel Napoleonův, J. L. LAGRANGE (1736—1813) a G. MONGE (1746—1818) studují singulární řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

V této souvislosti bych připojil několik podrobností k historii zmíněné *Riccatiovy rovnice*, která ve své době byla středem pozornosti některých předních badatelů a podržela svou zajímavost až do moderní doby. Riccatiova rovnice

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

byla v prvním období studována v některých zvláštních případech zejména RICCATIM, bratřími MIKULÁŠEM a DANIELEM BERNOULLIOVÝMI, Ch. GOLDBACHEM (1690—1764), pozdějším vychovatelem mladistvého cara Petra II., a EULEREM, který ve svých úvahách geniálně použil řetězových zlomků (1731). K názvu rovnice bych poznamenal, že již u d'ALEMBERTA v r. 1763 přichází jméno Riccatiovy rovnice ve výše uvedeném smyslu. V r. 1841 J. LIOUVILLE (1809—1882) dokázal, že Riccatiova rovnice obecně není kvadraturami řešitelná. V r. 1875 český matematik E. WEYR (1852—1903) upozornil na důležitou vlastnost Riccatiovy rovnice, že dvojpoměr každých jejich 4 partikulárních integrálů je konstantní; tato věta plyne bezprostředně z faktu známého již Eulerovi, že znalost jednoho partikulárního integrálu Riccatiovy rovnice umožňuje transformaci rovnice na lineární tvar. Konečně z moderních výzkumů je známo, že Riccatiova rovnice v komplexním oboru má zvláštní místo ve třídě racionálních rovnic prvního řádu: Je charakterizována tím, že všechny rozvětvovací body jejích řešení jsou pevné.

V polovině 18. století proniká studium diferenciálních rovnic do matematiky zpravidla v souvislosti s obtížnými fyzikálními a astronomickými problémy. V tomto směru mají důležitý význam otázky o tvaru nebeských těles, zejména země. Tento problém, jehož počátky jdou k NEWTONOVI a CH. HUYGENSOVI (1626—1695), vedl především k obsáhlé teorii rovnovážných stavů rotujících kapalin. V této teorii po Newtonovi a Huygensovi pokračovali zejména C. MACLAURIN (1698—1746), LAPLACE a mnohem později na ně navazovala řada matematiků 19. století (JACOBI, POINCARÉ, LJAPUNOV, LICHTENSTEIN, DARWIN, JEANS). První teorie o tvaru země byla vytvořena v r. 1743 CLAIRAUTEM a vedla k jisté diferenciální lineární rovnici 2. řádu pro zploštění zemských vrstev v závislosti jejich vzdáleností od společného středu; je to *Clairautova rovnice* pro zploštění země. Jestliže se zde opět setkáváme se jménej Clairautovým, připomeňme, že A. C. CLAIRAUT (1713—1765) byl nejenom vynikajícím matematikem, ale i fyzikem a astronomem. Mezi jeho slavné výkony patří, že z poruch dráhy Halleyovy komety usoudil na existenci neznámé planety, vzdálenější než Saturn; jde o planetu Uran, která byla objevena až 16 let po jeho smrti W. HERSCHELEM.

Diferenciální rovnice parciální. Derivace funkcí více proměnných, tedy parciální derivace, vyskytují se již v některých pracích NEWTONOVÝCH, LEIBNIZOVÝCH a BERNOULLIŮ. Kdežto znalosti o diferenciálních rovnicích obyčejných mají v padesátých letech 18. století znaky ucelené teorie, byly diferenciální rovnice parciální do matematiky explicitně zavedeny teprve r. 1734 EULEREM a jejich systematické studium začíná až v r. 1747 v souvislosti s problémem kmitající struny vyjádřeným rovnicí druhého řádu $\partial^2 u/\partial t^2 = c^2 . \partial^2 u/\partial x^2$. D'ALEMBERT našel řešení této rovnice ve tvaru $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ s dostatečně hladkými funkcemi f, g splňujícími okrajové podmínky. Omezení volby funkcí f, g dalo podnět k dlouhým diskusím, kterých se zúčastnili všichni matematikové té doby, zejména EULER, DANIEL BERNOULLI a později A. CAUCHY (1789—1857). Připomeňme, že se dodnes jednotlivá vyjádření řešení rovnice kmitající struny označují jmény d'Alemberta, Bernoullia a Cauchyho. V souvislosti s přibývajícími aplikacemi parciálních diferenciálních rovnic v mechanice a teoretické fyzice a s postupujícími znalostmi o obyčejných rovnicích vznikaly teorie zahrnující široké třídy parciálních rovnic. LAGRANGE a MONGE vytvořili teorii rovnic prvního řádu. Současně byly studovány různé typy rovnic druhého řádu s použitím rozmanitých metod, zejména trigonometrických řad a rozvojů v řady kulových funkcí. Monge vytvořil novou metodu geometrické integrace vztahující se zejména na významnou třídu parciálních rovnic druhého řádu $Ar + 2Ks + Lt + M = 0$. Jeho teorie charakteristik je vynikajícím výkonem, který podstatně ovlivnil další vývoj v oboru parciálních rovnic. Například základy teorie dotykových transformací, vytvořené S. LIEM (1842—1899), jsou již obsaženy v Mongeových pracích.

Diferenciální rovnice v širších dějinných souvislostech. Vývoj infinitesimálního počtu probíhal paralelně na kontinentě a ve Veľké Britanii, kde vedoucí osobností byl I. NEWTON.

Newtonovým nejvýznamnějším dílem jsou *Principia*, sepsaná původně jako přednášky (1684—1687), které vyšlo tiskem teprve v r. 1687 a ve druhém vydání v r. 1713. V něm jsou odvozeny Keplerovy zákony z Newtonova gravitačního zákona (1666) novým, *fluxonovým počtem*, což je v podstatě totéž co diferenciální počet u Leibnize. Poznamenejme, že Principia jsou základem klasické mechaniky.

V Newtonově době, tedy koncem 17. a na začátku 18. století, vzkvétala ve Veľké Britanii řada vynikajících středisek vědeckého bádání a slavných škol, zejména v Cambridgi, působišti Newtonově, Oxfordu, Londýně, Glasgowě a Edinburghu, jejichž představitelé se svými matematickými výkony často trvale zapsali do dějin matematiky: J. WALLIS (1616—1703), A. MOIVRE (1667—1754), B. TAYLOR (1685—1731), J. STIRLING (1692—1770). Avšak tento vývoj neměl dlouhého trvání, neboť, jak se uvádí, jeho tvůrci jednostranně ulpívali na newtonské tradici a ztráceli nové podněty. Po smrti posledního přímého Newtonova žáka C. MACLAURINA (1746) přechází rozvoj stále zřetelněji do rukou nové generace na kontinentě a v druhé polovině 18. století britská matematika v celkovém významu ustupuje do pozadí.

Vývoj na kontinentě a v Britanii se nedál isolovaně, třebaže vzájemné informace probíhaly někdy opožděně, zejména se strany britské, nebo byly zkreslené a často nesprávné, se strany druhé. LEIBNIZ sám byl v letech 1673 a 1676 v Londýně. Při první návštěvě předvedl svoji počítačku a stal se členem Royal Society; současně však zklamal britské kolegy mezerami ve znalosti literatury a patrně tím vzbudil pochybnosti o svých kvalitách. Později a zejména při své druhé návštevě v Londýne seznámil se jako člen Royl Society s některými neuveřejňovanými výsledky J. GREGORYHO (1638—1651) a NEWTONA o nekonečných řadách. Jinak byl Leibniz v čilé vědecké korespondenci s mnoha matematiky, zejména TSCHIRNHAUSEM (od r. 1677), HUYGENSEM (od r. 1679), JAKUBEM BERNOULLIM (od r. 1694) a j., a ovšem sám uveřejňoval své práce (zejména od r. 1682 v Acta eruditorum). Těmito cestami pronikaly jeho myšlenky, problémy, výsledky a záměry na veřejnost, někdy z dopisního styku povrchně a nesprávně.

Již z toho, co jsem uvedl o dvojím původu infinitesimálního počtu, o jeho nezměrných možnostech aplikačních a rychlém rozvoji co do počtu nových výsledků a nadšených pěstitelů, zdá se přirozené, že otázky prioritní nedaly na sebe dlouho čekat. Diskuse v tomto směru, zahájené a převážně vedené některými žáky obou tvůrců nového počtu, často zatížené rozmanitými chybami a snad i řevnivostmi, brzy nabyly ostrosti a prudké útočnosti a nakonec vyústili v úplnou roztržku mezi oběma mistry. Jejím důsledkem bylo naprosté vzájemné odcizení matematiků britských a kontinentálních, trvající téměř celé století. V dějinách matematiky jsou podrobně zaznamenány jednotlivé fáze tohoto prioritního sporu. V krátkém přehledu se věci měly takto:

První veřejné rozladění bylo způsobeno německým matematikem E. W. TSCHIRNHAUSEM (1651—1708), který se ještě v době před vyjitím zmíněné Leibnizovy práce o infinitesimálním počtu z r. 1684 seznámil s Descartesovou pozůstalostí, načež se nadšeně vyjádřil o DESCARTESOVI a pohrdavě o Angličanech. NEWTON reagoval dopisem LEIBNIZOVI a TSCHIRNHAUSOVI (1676). V této souvislosti bych poznamenal, že se Tschirnhausova osobnost jeví hodně složitou. Kdežto jeho výsledky o transformaci algebrických rovnic mají trvalou hodnotu a pronikly do učebnic klasické algebry, je současně jeho odborná činnost zatížena nevyzrálými publikacemi, ostrými vědeckými spory a chybami, které někdy byly mylně připisovány Leibnizovi. Uvádí se, že právě tyto okolnosti byly poslední příčinou vypuknutí prioritního sporu[1].

Nuže, Leibnizovo dílo bylo od r. 1685 předmětem kritik Newtonových stoupenců (J. WALLIS, J. CRAIG (1660—1731), FATIO DE DUILLIER (1664—1753), J. KEILL (1671—1721)), které vyústily (1708) ve veřejné obvinění Leibnize jako plagiátora Newtona. Leibniz sa bránil tím, že požádal Newtona a Royal Society, jejímž předsedou tehdy Newton byl, o rozhodnutí sporu. Za tím účelem byla při Royl Society zřízena komise, která o svém jednání vydala zprávu nazvanou *Commercium epistolicum.* Zpráva byla zveřejněna v r. 1712 a později i v letech 1722 a 1725 a obsahovala rozhodnutí, které — ostatně podle očekávání — vyznělo ve prospěch Newtona. V dějinách matematiky se uvádí, že jednání komise bylo povrchní a doloženě jednostranně zaujaté. Je přirozené, že za těchto okolností spor rozhodnutím komise neskončil, ale pokračoval i po Leibnizově smrti (1716). Teprve v 18. století byly objeveny nové doklady, z nichž vyplývalo, že nejzávažnější důkazové dokumenty, o něž se opíralo rozhodnutí komise, v Leibnizově vlastnictví nebyly, takže obvinění Leibnize z plagiátu nebylo ničím podloženo.

Několik pohledů na tvůrce těchto dějin. Dříve než se rozloučíme s bohatou panorámou vývoje diferenciálních rovnic v 17. a 18. století, připojme několik

[1] Je zajímavé, že z Tschirnhausových pokusů vznikl objev evropského porcelánu.

pohledů na sociální postavení matematiků v oné době a některé zvlášť vynikající vědecké osobnosti.

Kdežto se v 17. století na vylíčeném vývoji podstatně uplatňovali matematikové-amatéři, přecházejí v 18. století zásluhy o pokrok matematiky téměř výhradně na odborníky z povolání, profesory na universitách britských, italských a švýcarských, na členy pařížské Akademie a na matematiky hostující zejména v Berlíně a Petrohradě v rámci politiky prestiže tehdejších panovníků. V této souvislosti stojí za zmínku, že v 18. století působí v Italii první universitní profesorka matematiky MARIA GAETANA AGNESI (1718—1799), autorka tehdy proslaveného díla o infinitesimálním počtu. Matematikové 17. a 18. století se zpravidla neomezovali na úzké úseky rozmanitých disciplin, které právě vznikaly, nýbrž byli odborníky v celé tehdejší matematice. Nadto se v mnohých případech hluboce a aktivně zajímali o různé obory vyloženě praktického zaměření, např. o optiku, astronomii, stavbu lodí, hudbu apod.

Ve svém výkladu jsem se několikrát zmínil o vědeckých výkonech členů rodiny BERNOULLIŮ a domnívám se, že je vhodné osvětlit jejich vzájemné příbuzenské vztahy. Zakladatelem rodu byl basilejský občan a radní Mikuláš Bernoulli (1623—1708), který sám se matematikou nezabýval. Matematickou slávu přinášejí rodině další dvě generace: V první generaci nejstarší Mikulášův syn Jakub (1654—1705) a nejmladší Jan (1667—1748), označovaný jako Jan I. V druhé generaci Mikuláš I. (1687—1759), synovec obou uvedených bratrů, a pak tři synové Jana I.: Mikuláš II. (1695—1726), Daniel (1700—1782) a Jan II. (1710—1790). Tedy celkem 6 matematiků. V dalším ještě uslyšíme o Janu III. z další generace. Pro diferenciální rovnice má největší význam Jan I. Poznamenejme, že rodinná idyla Bernoulliů byla kalena ostrými vědeckými spory mezi bratry Jakubem a Janem I. Moje přednáška by měla neomluvitelnou mezeru, kdybych se alespoň několika slovy nezmínil o LEONARDU EULEROVI (1707—1783), snad největším matematickém géniovi všech dob. Narozen v Basileji, studoval Euler u Jana I. Bernoullia, načež ve věku 20 let odešel na Akademii věd v Petrohradě (1721—1741), pak do Berlína na Akademii založenou Bedřichem II.; později, v r. 1766, povolán Kateřinou II., vrátil se do Petrohradu, kde pak ztrávil poslední část svého života. Za jeho působení vznikla v Rusku matematická škola, která se v evropské matematice znamenitě uplatňovala. Vědecké výkony Eulerovy jsou úžasné. Eulerovy uveřejněné práce v počtu asi 800 mají rozsah přes 30 000 stran a naplňují 72 svazků úplného vydání (které zatím není ukončeno) jeho sebraných spisů. Mimoto existuje, převážne v archivu AN SSSR v Leningradě, několik tisíc stran Eulerových rukopisů a konceptů, přes 3000 stran jeho 12ti vědeckých zápisníků a část do tisíců jdoucích dopisů vědecké korespondence. Eulerovy vědecké výkony se vztahují na dobu asi 60ti let. Začínají v první čtvrtině 18. století a s přibývající intensitou pokračují až do jeho smrti, přes ztrátu pravého oka v r. 1738 a občasnou téměř úplnou slepotu. Po obsahové stránce se mimo matematiku týkají mechaniky, hydromechaniky, optiky, astronomie, nautiky, teorie pojišťování aj. Z Eulerových zápisníků se dovídáme, že se diferenciálními rovnicemi hodně zabýval v letech 1737, 1739, 1740, 1754—57, 1759—63.

Dovolte, abych v této souvislosti uvedl z novějších pramenů (podle jednoho článku sovětského matematika G. K. Michailova z r. 1957) popis způsobu, jak Euler v posledních letech svého života pracoval. Vylíčil jej Jan III. Bernoulli po své návštěvě Eulera v létě 1778, tedy pět let před jeho smrtí. Cituji (ve volném překladu): „Jeho (Eulerovo) zdraví je ještě docela dobré, za což vděčí velmi střídmé a pravidelné životosprávě; svého, před dlouhou dobou z největší části a po jistý čas zcela ztraceného zraku může však nyní užívat lépe, než si mnozí představují. Osoby sice podle tváře nerozezná, nemůže z papíru číst ani na papíře psát. Naproti tomu píše své matematické výpočty velmi zřetelně a celkem v obvyklé velikosti křídou na černé tabuli; tyto jsou pak ihned jedním z jeho adjutantů, pány Fussem a Golowinem (nejčastěji prvním) zapisovány do velké knihy, načež z těchto materiálů jsou podle jeho návodu zpracována pojednání." Eulerovo vědecké dílo je dnes, po 200 letech, přirozeně v mnohých směrech překonané, nikdy však zastaralé a je stále živé, jak dosvědčují citáty jeho prací i v nejnovějších publikacích.

3. Několik pohledů na teorii diferenciálních rovnic v 19. století

Bohatý a rychlý rozvoj matematických disciplin, obecněji přírodních věd, v 19. století je přímým důsledkem stále vzrůstajícího počtu badatelů a jejich publikací. Tento vývoj pokračuje nepřetržitě a to v takové míře, že počet matematických publikací vzrůstá exponenciálně. Základy a stimulátory tohoto vývoje jsou ovšem složky politické, sociální a hospodářské. K němu podstatně přispěla francouzská revoluce reformami v oblasti výuky, vědy a techniky. Podrobné studium poměru v zemích západní, střední a východní Evropy a později ve Spojených státech amerických, v souvislosti s rozvojem vysokého školství, učených společností, vědeckých sborníků a časopisů a s vylíčením sociálních podmínek badatelů je četbou poutavou a poučnou, osvětlující mnohé z toho, co přetrvalo a co známe z vlastní zkušenosti.

Vraťme se nyní k vývoji diferenciálních rovnic v rámci matematiky a ovšem zejména matematické analýzy. Uvedl jsem již, že 19. století přináší rozhodující pokrok klasické teorie diferenciálních rovnic jako samostatného oboru matematiky. Tím je míněno, že se vzrůstajícím počtem nových výsledků se čím dál tím víc uplatňuje snaha po vnitřní výstavbě teorie diferenciálních rovnic, zejména pokud jde o vytříbenost základních pojmů, logickou přesnost důkazů a o systematické a přehledné uspořádání látky do samostatného celku, ovšem s otevřenými hranicemi. V té době proniká tento vývoj celou matematikou. Připomeňme např. výkony B. BOLZANOVY (1781—1848) a K. WEIERSTRASSOVY (1815—1897) v souvislosti se základy matematické analýzy, A. CAUCHYOVY v oboru nekonečných řad, vzpomeňme na C. F. GAUSSE (1777—1855) a jeho základní větu algebry, N. H. ABELA (1802—1829) a E. GALOISE (1811—1832) v souvislosti s algebraickými rovnicemi, a opět na C. F. GAUSSE, na N. I. LOBAČEVSKÉHO (1792—1856), J. BOLYAIE (1802—1860), B. RIEMANNA (1826—1866) a D. HILBERTA (1862—1943) pokud jde o geometrii.

Počátky tohoto vývoje vznikly brzy po objevení infinitesimálního počtu. Již v letech 1694—95 prohlašoval Holanďan B. NIEUWENTIJT myšlenky Newtonova učitele I. Barrowa (1630—1677), Newtonovy a Leibnizovy za obskurní a nebezpečné. Později, v r. 1754, proslulý anglický filosof G. BERKELEY (1685—1753) ve svém pamfletu „Analyst . . .“ ostře kritizoval logické nedostatky pojmů a metod nového počtu, zejména časté používání indukce. Jisté je, že tehdejší úvahy byly intuitivní a „podle citu“ a že o důkazech v dnešním smyslu nemůže býti řeč. Nádherná stavba tehdejší matematické analýzy opravdu stála na vratkých základech.

V teorii diferenciálních rovnic byla na začatku 19. století základní mezera v otázce existence integrálů. V nejjednodušším případě jedné rovnice $y' = f(x, y)$ šlo o důkaz, že za jistých předpokladů o funkci f prochází daným bodem roviny alespoň jedno řešení rovnice. V okolnostech 18. století nepochyboval o existenci řešení patrně žádný matematik. Snad to souviselo s naivními geometrickými představami nebo s domněnkou, ovšem nesprávnou, že evidentní existence řešení určitého fyzikálního problému, idealizovaného diferenciální rovnicí, činí důkaz existence jejích integrálů zbytečným.

Nuže, EULER již v r. 1768 aproximoval řešení rovnice $y' = f(x, y)$, procházející daným bodem $(x_., y_.)$ polygony sledujícími směrové pole rovnice a tím otevřel účinnou cestu k výpočtu přibližných hodnot řešení. Cauchy v letech 1820—1830 ukázal, že tento postup vede k posloupnosti funkcí, jejíž limitou je řešení diferenciální rovnice, procházející bodem $(x_., y_.)$. Tím byla existenční věta poprve dokázána. Cauchyovu metodu znovu našel R. LIPSCHITZ (1832—1903) a přitom podstatně zeslabil Cauchyovy předpoklady o funkci f. V souvislosti s těmito výkony se mluví o *metodě Cauchy-Lipschitzově*.

První důkaz existenční věty v případě, že funkcie f je analytická (obecněji v případě systémů explicitních diferenciálních rovnic prvního řádu s analytickými pravými stranami) podal opět Cauchy, a to v litografovaných pojednáních z let

1831—1833 a 1835. Jeho metoda je tentokrát založena na rozvojích analytických funkcí v mocninné řady. Cauchy ji nazýval *Calcul des limites;* dnes se ji říká *metoda majorantních řad.*

Oba případy, o nichž jsem hovořil, jsou ovšem podstatně rozdílné, protože v prvním jde o funkce reálné se širokými předpoklady, v druhém o komplexní funkce analytické. Tyto případy nebyly v 19. století po dlouhou dobu rozlišovány. Francouzský matematik J. HADAMARD (1865—1963) píše v jednom článku v Encyclopédie Française, z r. 1937, že se matematikové v 19. století zajímali jenom o druhý případ, neboť byli příliš zvyklí zabývat se výhradně analytickými funkcemi; k tomu připojuje tuto poznámku (cituji): „Za mých studií jsme na metodu Cauchy—Lipschitzovu (metoda Picardova tehdy ještě neexistovala) nebyli ani upozorněni. Když pak někteří z nás náhodou dostali do rukou Lipschitzův výklad, zajímali jsme se o něj jako o nový důkaz a neuvědomovali si, že jde o výsledek jiný, než který jsme znali.“

Prvními existenčními důkazy se dovršuje první vývojové období klasické teorie diferenciálních rovnic. Teorie diferenciálních rovnic se začleňuje do matematického dění jako samostatná disciplina matematické analýzy s vlastní tématikou pronikající do různých matematických oborů a s nezměrnými aplikačními možnostmi v přírodních a technických vědách. Poznamenejme, že sám další vývoj v okruhu existenčních vět, vyznačený jmény E. PICARD, G. PEANO, O. PERRON, C. CARATHÉODORY aj., v souvislosti s problematikou o jednoznačnosti integrálů a jejich numerických výpočtech, je bohatý a okouzlující.

Ke konci své přednášky uvedu ve stručnosti hlavní komplexy problémů, které v hlavních rysech charakterizují teorii (obyčejných) diferenciálních rovnic v druhé polovině 19. století. Za největší výkon v matematické analýze v 19. století lze patrně považovat vytvoření teorie analytických funkcí CAUCHYM a WEIERSTRASSEM, neboť ten podstatně ovlivnil analýzu 19. století. Tento vliv se v teorii diferenciálních rovnic uplatnil v té míře, že se badatelé soustředili téměř výhradně na komplexní obor, zatím co reálný případ zůstával nepovšimnut téměř do konce století. To ostatně napovídá hořejší Hadamardova poznámka.

Nuže, z hlavních komplexů otázek o diferenciálních rovnicích v komplexním oboru, studovaných v 19. století a z nichž některé přesáhly do 20 století., bych především uvedl studium lokálních nebo globálních vlastností řešení diferenciálních rovnic v souvislosti se singularitami. Zejména byly studovány: povaha řešení lineárních homogenních rovnic n-tého řádu v okolí singulárních bodů jejich koeficientů, povaha řešení rovnic racionálního charakteru $y' = P(x, y)/Q(x, y)$ v okolí bodů neurčitosti, charakterizace rovnic prvního a vyšších řádů druhem singularit jejich integrálů, speciální rovnice 2. řádu lineární, zejména rovnice Riemannova a její zvláštní případy (rovnice hypergeometrická a Legenderova), a nelineární. Dále bych uvedl studium problémů ekvivalence systémů diferenciálních rovnic, zejména v lineárním případě, a ovšem vynikající výkony S. Lieovy v souvislosti s jeho teorií grup. Pokud jde o případ reálný, týkají se hlavní výkony kvalitativní teorie diferenciálních rovnic, teorie samoadjugované rovnice 2. řádu a A. M. Ljapunovy (1857—1918) teorie stability.

Ke konci 19. a na začátku 20. století se v rozvoji teorie diferenciálních rovnic objevují známky stagnace. Dá sa to snad doložit i tím že mezi proslulými 23ti Hilbertovými problémy z r. 1900, které zachycují obraz matematiky na začátku 20. století a současně naznačují směry jejího dalšího vývoje, je z oboru obyčejných diferenciálních rovnic uveden právě jenom Riemannův problém, týkající se určení diferenciálních lineárních rovnic Fuchsova typu s danou grupou monodromie. Nové oživení nastává v době mezi oběma válkami a pak ovšem po druhé válce. Začíná nový a co do rozsahu a hloubky nebývalý rozvoj přírodních a technických věd, podmíněný příznivými politickými, sociálními a hospodářskými změnami v řadě států, vedoucími k široké demokratizaci vzdělanosti. Nastává období vědecko-technické revoluce, v němž matematika proniká hluboko do nejrůznějších oborů lidské činnosti. V souvislosti s tím vznikají nové způsoby vědecké práce vyznačující se rostoucím významem vědeckých škol a metodami kolektivní práce. Počet matematických publikací v celosvětovém měřítku dosahuje 18 000 ročně. V teorii diferenciálních rovnic se začíná podstatně uplatňovat rozvoj moderních matematických disciplin, zejména analýzy, algebry, topologie, funkcionální analýzy a nové výpočetní techniky. Tento vývoj se v plné míře projevuje ve státech s tradičně vyspělou matematickou kulturou. Zejména jsme svědky velkých úspěchu matematiky v socialistických státech, v čele se SSSR. Všichni víme, že vědecké výkony sovětských matematiků, zejména též v oboru diferenciálních rovnic, jsou na předním místě světového pokroku matematiky.

A těmito posledními pohledy na teorii diferenciálních rovnic v rámci dějin matematiky moje přednáška končí.

Literatura

Encyclopédie Francaise I. Paris 1937.
Histoire générale des Sciences II (1958), III (1961). Presses Universitaires de France.
Hofmann, J. E.: Um Eulers erste Reihenstudien. Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akad. der Wiss. zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. Berlin 1959, S. 139—208.
Mikhailov, G. K.: Notizen über die unveröffentlichten Manuskripte von Leonhard Euler. Ibid., S. 256—280.
Naas, J.—Schmid, H. L.: Mathematisches Wörterbuch mit Einbeziehung der Mathematischen Physik I, II. Berlin 1961.