

## ÚLOHY A PROBLÉMY

Rubriku viedie Tomáš Hecht, 816 31 Bratislava, Matematický pavilón, Mlynská dolina. Riešenia úloh uvedených v tomto zväzku pošlite na adresu vedúceho rubriky do 31. 1. 1976.

*B 33.* Dokážte, že neexistuje taká podmnožina reálnych čísel, ktorá by vzhľadom na prirodzené usporiadanie bola dobre usporiadaná a nespočiteľná.

O. Strauch

*B 34.* Dokážte, že ak máme ľubovoľný systém po dvoch disjunktných metrických priestorov, potom na ich zjednotení existuje metrika, ktorá je na týchto priestoroch totožná s pôvodnou metrikou.

O. Strauch

*B 35.* Označme  $A$  množinu tých vrcholov konečného neorientovaného grafu  $G$  bez slučiek a násobných hrán, že pre každé  $a \in A$  platí  $d(G - a) < d(G)$ , kde  $d$  je priemer grafu  $G$ . Dokážte, že  $A$  má najviac 2 prvky!

T. Hecht

*B 36.* Nайдите таку поступнoscь реальных чисел  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , ктора nemá limitu, avšak všetky jej подпоступности твару  $\{a_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $k \geq 2$  celé, limitu majú (t. j. поступнoscь  $a_2, a_4, a_6, \dots$  konverguje, поступнoscь  $a_3, a_6, a_9, \dots$  konverguje atď.).

T. Hecht

*B 37.* Platí tátó známa Lagrangeova veta o grupách: Ak  $G$  je konečná grupa rádu  $n$  (t. j.  $G$  má  $n$  prvkov) a  $H$  je podgrupa grupy  $G$ , potom rád grupy  $H$  delí  $n$ .

Nайдите konečnú grupu  $G$  rádu  $n$  (pre vhodné  $n$ ), aby existovalo prirodzené číslo  $d$ , ktoré delí  $n$  a neexistovala podgrupa grupy  $G$  s  $d$  prvkami.

T. Hecht

*B 38.* Dokážte, že na množine všetkých spojitych reálnych funkcií definovaných na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  existuje metrika  $d$  tak, že ak funkcionálna поступнoscь  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  konverguje k funkcií  $f$  bodove, потом  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$

O. Strauch

## Riešenia niektorých problémov z 5. zväzku Matematických obzorov

### B 21 (M. Franek).

Pre  $n = 4$  tvrdenie platí. Pre  $n > 4$  je  $8 < p_1 \dots p_{n-2}$  a keďže podľa Bertrandovho postulátu ku každému prirodzenému číslu  $k$  existuje také prvočíslo  $p$ , že  $k < p \leq 2k$  platí  $p_{n+1} \leq 2p_n \leq 4p_{n-1}, \Rightarrow p_{n+1}^2 \leq 4p_{n-1} \cdot 2p_n < p_1 p_2 \dots p_n$ .

### B 22 (A. Hnáth) — upravené.

Dokážeme, že žiadne  $n, n > 50$ , uvedenú vlastnosť nemá. Ak sa v rozklade čísla  $n > 50$  nevyskytuje prvočíslo 2, potom  $(4, n) = 1$ , čo implikuje, že  $n$  nemá požadovanú vlastnosť. Podobne dokážeme, že v rozklade čísla  $n \geq 50$ , majúceho vlastnosť požadovanú v probléme, sa musia vyskytovať prvočísla 3, 5, 7.

Nech sa v rozklade čísla  $k \geq 50$  na prvočinitele vyskytujú zároveň prvočísla 2, 3, 5, 7. Potom z prvočísel vystupujúcich v rozklade čísla  $k$  utvorme najdlhšiu súvislú postupnosť 2, 3, 5, 7,  $p_5, p_6, \dots, p_n$ . Platí ( $\alpha_i \geq 1$ )

$$k = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} p_{k_1}^{\alpha_{k_1}} p_{k_r}^{\alpha_{k_r}} \dots \geq 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots p_n > p_{n+1}^2$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva z výsledku úlohy B 21. Potom  $(p_{n+1}, k) = 1$  a  $p_{n+1}^2$  je číslo zložené, menšie než  $k$ .

Zostáva vyšetriť čísla menšie ako 50. Lahko zistíme, že z týchto čísel majú požadovanú vlastnosť práve čísla 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 30.

**Poznámka redakcie.** Riešenie úlohy B 22 sa vzťahuje na opravené znenie úlohy B 22 uverejnené v 6 zväzku Matematických obzorov.