ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Vojtech Filo, 921 01 Piešťany, Lúčna 14. Nové úlohy (s riešeniami) posielajte na jeho adresu.

Úloha 1 (autor V. Filo).

Popíšte priebeh a zostrojte graf funkcie f, ktorá je definovaná takto:

a) $x \to |x^2 - 2x - 3|$ $\quad \forall x \in \langle -1, 3 \rangle$

b) $x \to |x + 2|$ $\quad \forall x \in \langle -5, -1)$

c) $x \to |2 - x|$ $\quad \forall x \in (3, 5 \rangle$

Riešenie:

a) $x \to |x^2 - 2x - 3| \Rightarrow \forall x \in \langle -1, 3 \rangle$; $\quad (x + 1)(x - 3) < 0 \Rightarrow |x^2 - 2x - 3| = -x^2 + 2x + 3$. Pomocou prvej derivácie zistíme priebeh funkcie $x \to -x^2 + 2x + 3$.

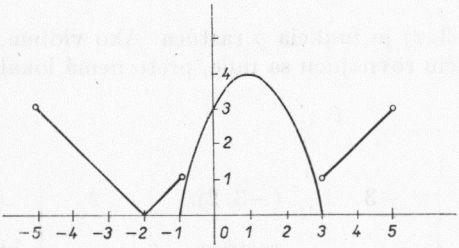
$f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow (-2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1)$. V tomto bode má f extrém.

$f''(x) = -2 \Rightarrow f$ má v bode $x = 1$ lokálne maximum, teda $\forall x \in \langle -1, 1)$ je f rastúca, lebo $f'(x) > 0$, $\forall x \in (1, 3 \rangle$ je f klesajúca, lebo $f'(x) < 0$.

b) $x \to |x + 2|$; $\quad \forall x \in \langle -5, -2)$ je $x + 2 < 0 \Rightarrow |x + 2| = -x - 2$, a teda f je klesajúca, lebo $f'(x) = -1$. $\forall x \in \langle -2, -1)$ je f rastúca

c) $x \to |2 - x|$; $\forall x \in (3, 5 >$ je $2 - x < 0 \Rightarrow |2 - x| = x - 2$, a teda f je rastúca, lebo $f'(x) > 0$.

x	$\langle -5, -2)$	$\langle -1, 1)$	1	$(1, 3 \rangle$	$(3, 5 \rangle$
f	klesajúca	rastúca	lokálne maximum	klesajúca	rastúca



Obr. 1

a)

x	-5	-1
$f(x)$	3	1

b)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	3	4	3	0

c)

x	3	5
$f(x)$	1	3

Úloha 2 (autor V. Filo).

Popíšte priebeh a zostrojte graf funkcie $g\colon x \to x/|x^2 + x - 6|$.

Riešenie:

$\forall x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$ je $x^2 + x - 6 > 0 \Rightarrow |x^2 + x - 6| = x^2 + x - 6$, teda $x \to \dfrac{x}{x^2 + x - 6}$. Pomocou prvej derivácie zistíme priebeh funkcie g. $g'(x) = \dfrac{-x^2 - 6}{(x^2 + x - 6)^2} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{-(x^2 + 6)}{(x^2 + x - 6)^2} \Rightarrow g'(x) < 0$

g je v tomto intervale klesajúca.

$$\forall x \in (-3, 2) \text{ je } x^2 + x - 6 < 0 \Rightarrow |x^2 + x - 6| = -x^2 - x + 6;$$

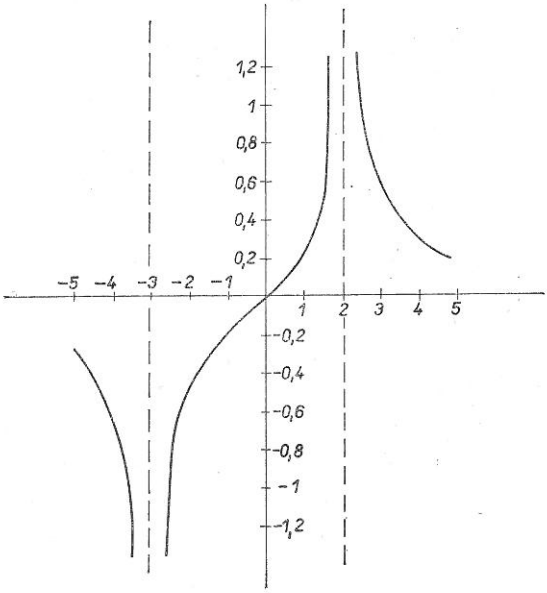
$$x \to \frac{x}{-x^2 - x + 6},$$

$$g'(x) = \frac{x^2 + 6}{(-x^2 - x + 6)^2} > 0.$$

V intervale $(-3, 2)$ je funkcia g rastúca. Ako vidíme, nemá v žiadnom bode prvú deriváciu rovnajúcu sa nule, preto nemá lokálny extrém.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 2)$	2	$(2, \infty)$
g	klesajúca	—	rastúca	—	klesajúca

x	-5	-4	$-3,5$	-3	$-2,5$	-2	-1	0	1	$1,5$	2	$2,5$	3	4	5
$g(x)$	$-0,3$	$-0,7$	$-1,3$	$-$	$-1,1$	$-0,5$	$-0,2$	0	$0,2$	$0,6$	$-$	$0,9$	$0,5$	$0,3$	$0,2$



Obr. 2