NUTNÁ A POSTAČUJÚCA PODMIENKA PRE EXISTENCIU LIMITY

MARTA GEROVÁ, BRATISLAVA

V tomto krátkom príspevku podáme dôkaz známej nutnej a postačujúcej (Cauchyho-Bolzanovej) podmienky pre existenciu vlastnej limity metódou, ktorá nám dovoľuje iný pohľad na limitu funkcie v danom bode a ktorá nám tiež umožňuje sformulovať novú modifikáciu nutnej a postačujúcej podmienky pre existenciu limity.

Nech R je množina všetkých reálnych čísel a nech $\overline{R} = R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ je rozšírená množina všetkých reálnych čísel s obvyklou topológiou [1]. Okolie bodu $a \in \overline{R}$ budeme označovať $O(a)$, resp. $O_1(a)$ a podobne. Znakom M' budeme označovať množinu všetkých hromadných bodov množiny M.

Veta A. Nech $N \subset M, f\colon M \to R$ a nech $a \in N'$. Nutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby existovala vlastná limita

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in N}} f(x) \tag{1}$$

je, aby bola splnená táto (Cauchyho-Bolzanova) podmienka

$$(C - B) \quad \forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{O(a)} \ \forall_{x,\, y \in N - \{a\}} \ (x, y \in O(a) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

V učebniciach matematickej analýzy sa pri dôkaze tejto vety využíva skutočnosť, že istá postupnosť (cauchyovská, resp. monotónna) bodov z R je konvergentná v R (pozri napr. [2], [5]). My teraz ukážeme, že dôkaz vety A možno urobiť priamo. Pritom pri jej dôkaze použijeme nasledovnú známu vetu, ktorá hovorí o jednej dôležitej vlastnosti množiny reálnych čísel.

Veta B. (Veta o supreme). Každá neprázdna zhora ohraničená množina reálnych čísel má supremum v R ([3]).

Dôkaz vety A. Pretože dôkaz nutnosti sa od štandardného dôkazu nelíši, obmedzíme sa na dôkaz toho, že Cauchyho-Bolzanova podmienka je postačujúcou podmienkou pre existenciu limity.

Postačujúca podmienka. Nech podmienka $(C - B)$ je splnená. Označme znakom D množinu všetkých tých čísel d, pre ktoré existuje okolie $O_d(a)$ bodu a tak, že

$$\forall_{y \in N - \{a\}} \ (y \in O_d(a) \Rightarrow f(y) > d).$$

Ukážeme, že $D \neq \emptyset$ a že D je zhora ohraničená číselná množina. Skutočne, z podmienky (C — B) vyplýva: k číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje také okolie $O_1(a)$ bodu a, že pre všetky $x, y \in N \cap (O_1(a) - \{a\})$ je

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(y) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z týchto nerovností vyplýva, že $f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \in D$ a $f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \bar{\in} D$.

Tým je ukázané, že $D \neq \emptyset$. Teraz ukážeme, že množina D je zhora ohraničená. Nech $D_R = R - D$. Dokážeme, že každé číslo z D_R je horným ohraničením množiny D. Nepriamo. Nech existuje $d_0' \in D_R$ tak, že d_0' nie je horným ohraničením množiny D. To znamená, že existuje aspoň jedno $d_0 \in D$ tak, že $d_0 > d_0'$. Pretože $d_0 \in D$, existuje okolie $O_{d_0}(a)$ bodu a tak, že pre všetky $y \in N \cap (O_{d_0}(a) - \{a\})$ je $f(y) > d_0$. Z tejto skutočnosti a z toho, že $d_0 > d_0'$ vyplýva, že $d_0' \in D$. Čo ale nie je možné, pretože $D \cap D_R = \emptyset$.

Teda D je neprázdna zhora ohraničená číselná množina, na základe vety B má supremum v R. Označme ho znakom b. Ukážeme, že

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in N}} f(x) = b.$$

Pretože $f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \in D$, $f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \in D_R$ pre ľubovoľné $x \in N \cap (O_1(a) - \{a\})$, je

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leqq b \leqq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

pre každé $x \in N \cap (O_1(a) - \{a\})$, t. j.

$$\forall_{x \in N - \{a\}} \left(x \in O_1(a) \Rightarrow |f(x) - b| \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\right).$$

To ale znamená, že

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in N}} f(x) = b.$$

Veta je dokázaná.

Dôsledok. Postupnosť reálnych čísel $\{b_n\}_{n-1}^{\infty}$ je konvergentná vtedy a len vtedy, ak je cauchyovská.

Poznámka 1. Použitím vety B sme ukázali, že každá cauchyovská postupnosť je konvergentná v R. Dá sa ukázať, že platí aj obrátené tvrdenie: Ak každá cauchyovská postupnosť je konvergentná v R, potom platí veta o supreme.

Ak by sme v dôkaze vety A uvažovali namiesto množiny

$$D = \{d \in R \mid \underset{O_d(a)}{\exists} \underset{x \in N - \{a\}}{\forall} (x \in O_d(a) \Rightarrow f(x) > d)\} \tag{*}$$

množinu

$$C = \{c \in R \mid \underset{O_c(a)}{\exists} \underset{x \in N - \{a\}}{\forall} (x \in O_c(a) \Rightarrow f(x) < c)\} \tag{**}$$

potom obdobným spôsobom by sa ukázalo, že

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in N}} f(x) = \inf C^{1)}.$$

To znamená, že ak existuje vlastná limita (1), potom $\sup D = \inf C \in R$. Dokonca možno ukázať, že platí:

Veta C. Nech $N \subset M$ a nech $a \in N'$, $f\colon M \to R$. Potom limita (1) existuje vtedy a len vtedy, ak

$$\sup D = \inf C = b \in \overline{R}. \tag{2}$$

Pritom táto limita sa rovná b.

Poznámka 2. 1. Nech $D_R = R - D$, $C_R = R - C$. Potom
i) $C \subset D_R$, $D \subset C_R$ a $\sup D \leqq \inf C$;
ii) rovnosť (2) je ekvivalentná s každou z nasledovných rovností

$$\inf D_R = \sup C_R$$

$$C' = D'_R \; (D' = C'_R).$$

2. Limita (1) je nevlastná vtedy a len vtedy, ak platí rovnosť (2) a práve jedna z množín C a D je prázdna.

3. $\inf C = \limsup\limits_{\substack{x \to a \\ x \to N}} f(x)$, $\sup D = \limsup\limits_{\substack{x \to a \\ x \to N}} f(x)$. (Vzhľadom na túto okolnosť je veta C totožná s vetou 79 z [5], str. 175.)

Na základe hore uvedených skutočností možno zaviesť pojem limity nasledovným spôsobom:

Nech $M \subset R$, $f\colon M \to R$, $N \subset M$ a nech $a \in N'$. Nech množiny D, C sú definované podľa (*), (**). Hovoríme, že funkcia f má v bode a limitu rovnajúcu sa $b \in \overline{R}$, vzhľadom na množinu N, ak platí

$$\sup D = \inf C = b.$$

---

1) Z vety B vyplýva, že každá neprázdna množina reálnych čísel zdola ohraničená má infimum v R.

Poznámka 3. Veta A a veta C platia aj pre funkcie f definované na ľubovoľnej podmnožine $M(N \subset M,\ a \in N')$ topologického priestoru X s oborom hodnôt v R.

Literatúra

[1] Švarc, L.: Analiz. Tom 1. Moskva, Izdateľstvo Mir 1972 (preklad z francúzštiny).
[2] Grebenča, M. K.—Novoselov, S. I.: Kurs matematičeskogo analiza. Tom 1. Moskva, UČPEDGIZ 1948.
[3] Jarník, V.: Diferenciální počet I. Praha, NČSAV, 1955.
[4] Kluvánek, I.—Mišík, L.—Švec, M.: Matematika I. Bratislava, SVTL 1959.
[5] Jarník, V.: Diferenciální počet II. Praha, NČSAV 1956.