O NEKONEČNE DISTRIBUTÍVNOM ZÁKONE

BELOSLAV RIEČAN, BRATISLAVA

Nech $A_n (n = 1, 2, \ldots)$, B sú podmnožiny danej základnej množiny X. Ľahko sa zistí, že

$$B \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n).$$

Niečo podobného platí v množine funkcií. Ak $f_n (n = 1, 2, \ldots)$, g sú reálne funkcie definované na intervale (a, b), tak

$$\min(g, (\sup_n f_n) = \sup_n (\min (g, f_n)).$$

Súvislosť medzi týmito faktami je ešte zjavnejšia, ak použijeme označenia používané v teórii zväzov.

Nech S je čiastočne usporiadaná množina, t. j. množina s reflexívnou, antisymetrickou a tranzitívnou reláciou $\leqq$. Spojením $a \vee b$ prvkov a, b rozumieme najmenšie horné ohraničenie prvkov a, b. Platí teda: 1. $a \vee b \geqq a$, $a \vee b \geqq b$. 2. Ak $c \geqq a$, $c \geqq b$, tak $c \geqq a \vee b$. Podobne sa definuje priesek $a \wedge b$, totiž najväčšie dolné ohraničenie prvkov a, b. Čiastočne usporiadaná množina S sa nazýva zväzom, ak $a \vee b$, $a \wedge b$ existujú pre každé dva prvky $a, b \in S$. Ak existuje vo zväze S dokonca najmenšie horné ohraničenie postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z S, označujeme ho znakom $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ľahko vidieť, že čiastočne usporiadaná množina S_1 všetkých podmnožín množiny X (kde $A \leqq B$ práve vtedy, keď $A \subset B$) je zväzom, v ktorom

$$A \vee B = A \cup B, \quad A \wedge B = A \cap B, \quad \bigvee_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Ďalej, ak S_2 je čiastočne usporiadaná množina všetkých reálnych funkcií na danej množine (s obvyklým usporiadaním, t. j. $f \leqq g$ práve vtedy, keď $f(x) \leqq g(x)$ pre všetky x, tak S_2 je zväzom, v ktorom

$$f \vee g = \max (f, g), f \wedge g = \min (f, g), \bigvee_{n=1}^{\infty} f_n = \sup_n f_n$$

Pritom napr. $\min (f, g)$ je funkcia, ktorá v bode x nadobúda hodnotu $\min (f(x), g(x))$. Podobne napr. $\sup_n f_n(x) = \sup \{f_1(x), f_2(x), \ldots\}$. Teraz už zreteľne vidno, že nekonečne distribu tívny zákon možno v oboch špeciálnych prípadoch zapísať takto:

$$z \wedge (\bigvee_{n=1} x_n) = \bigvee_{n=1} (z \wedge x_n).$$

V tejto poznámke sa zamýšľame nad tou skutočnosťou, že nekonečne distributívny zákon platí v dvoch predsa len trochu odlišných štruktúrach.

Uvedené množiny S_1, S_2 majú spoločné mnohé vlastnosti. Označme znakom $A—B$ množinový rozdiel (vo zväze S_1) a tým istým znakom $f — g$ rozdiel dvoch funkcií f, g (vo zväze S_2). V oboch prípadoch platia tieto dve podmienky:

(1) Ak existuje $\bigvee a_n$, tak pre všetky a existuje aj $\bigwedge (a — a_n)$ a platí

$$a — \bigvee a_n = \bigwedge (a — a_n).$$

(2) Ak $x \geqq y$ a pre nejaký prvok u je $x — y \leqq u — u$, tak $x = y$.

Pravda, z podmienok (1) a (2) nevyplýva ani distributívny zákon, tobôž nekonečne distributívny zákon. To budeme demonštrovať na nasledujúcom príklade:

Príklad. Nech S je množina všetkých lineárnych podpriestorov dvojrozmerného priestoru R^2. (S teda pozostáva z nulového podpriestoru $\{0\}$, celého priestoru R^2 a všetkých jednorozmerných podpriestorov, t. j. priamok prechádzajúcich začiatkom.) Usporiadanie je dané inklúziou. Všimnime si, že $a \wedge b \supset a \cup b$, ale $a \vee b$ sa nemusí zhodovať s $a \cup b$. Zjednotenie dvoch rôznych priamok a, b totiž nepatrí do S; najmenší lineárny podpriestor obsahujúci a aj b je R^2, teda $a \vee b = R^2$. Nech x_1, x_2, z sú tri navzájom rôzne lineárne podpriestory. Potom

$$z \wedge x_1 = z \wedge x_2 = \{0\},\ x_1 \vee x_2 = R^2$$

teda

$$(z \wedge x_1) \vee (z \wedge x_2) = \{0\} \vee \{0\} = \{0\}$$

ale

$$z \wedge (x_1 \vee x_2) = z \wedge R^2 = z \neq \{0\}.$$

Stačí však, ak k podmienkam (1) a (2) pridáme distributívny zákon (v trochu zakuklenej forme) a dostaneme nekonečne distributívny zákon.

Veta. Nech S je zväz s binárnou operáciou —, ktorá vyhovuje podmienkam (1), (2) a

(3) Ak $x \leqq y$, tak pre všetky z je $z \wedge y — z \wedge x \leqq y — x$. Ak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť prvkov z S a z je prvok z S a ak existujú prvky $\bigvee x_n$ a $\bigvee (x_n \wedge z)$, tak platí rovnosť

$$z \wedge (\bigvee x_n) = \bigvee (z \wedge x_n).$$

Dôkaz. Vždy platí vzťah $(\bigvee x_n) \wedge z \geqq \bigvee (x_n \wedge z)$. Položme v (3) $x = x_n$, $y = \bigvee_m x_m$. Potom

$$z \wedge (\bigvee x_m) — z \wedge x_n \leqq \bigvee_m x_m — x_n. \tag{4}$$

Z vlastnosti (1) (ak tam položíme $a_n = z \wedge x_n$, $a = z \wedge \bigvee_m x_m$) dostávame

$$\bigwedge_n (z \wedge \bigvee_m x_m — z \wedge x_n) = z \wedge \bigvee_m x_m — \bigvee_n (z \wedge x_n). \tag{5}$$

Podobne, z (1) ($a_n = x_n$, $a = \bigvee_m x_m$) dostávame

$$\bigwedge_n (\bigvee_m x_m - x_n) = \bigvee_m x_m - \bigvee_n x_n. \tag{6}$$

Zo vzťahov (4), (5) a (6) vyplýva, že

$$z \wedge \bigvee_n x_n - \bigvee_n (z \wedge x_n) \leqq \bigvee_n x_n - \bigvee_n x_n.$$

Zostáva nám použiť (2). Položme $x = z \wedge \bigvee_n x_n$, $y = \bigvee_n (z \wedge x_n$, $u = \bigvee_n x_n$. Potom $x \geqq y$, $x - y \leqq u - u$, teda $x = y$, t. j.

$$z \wedge \bigvee_n x_n = \bigvee_n (z \wedge x_n).$$

Záverom ukážeme, že z uvedenej vety vyplýva platnosť nekonečne distributívneho zákona nielen pre systém všetkých podmnožín danej množiny resp. všetkých reálnych funkcií definovaných na danej množine, ale aj v ľubovoľnej Booleovej δ-algebre, resp. ľubovoľnej komutatívnej δ-úplnej l-grupe.

Pripomeňme, že Booleova algebra (pozri [2] kap. XIV, § 8) je taký distributívny zväz, ktorý má najmenší prvok 0, najväčší 1 a v ktorom má každý prvok a komplement, t. j. taký prvok a', že $a \wedge a' = 0$, $a \vee a' = 1$. Booleova algebra je δ-úplná, ak každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má najmenšie horné ohraničenie $\bigvee a_n$.

Komutatívna grupa G sa nazýva komutatívnou l-grupou, ak je súčasne zväzom a ak v nej platí implikácia $x \leqq y \Rightarrow x + z \leqq y + z$. Komutatívna l-grupa je δ-úplná, ak každá zhora ohraničená postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má najmenšie horné ohraničenie $\bigvee a_n$.

Dôsledok 1. ([1], kap. X, § 10, veta 12). Nech S je δ-úplná Booleova algebra. Potom pre všetky $x_n \in S (n = 1, 2, \ldots)$ a všetky $z \in S$ platí

$$z \wedge (\bigvee_n x_n) = \bigvee_n (z \wedge x_n)$$

Dôkaz. Položme $a - b = a \wedge b'$. Stačí, ak dokážeme (1), (2), (3). Predovšetkým

$$a - \bigvee a_n = a \wedge (\bigvee a_n)' = a \wedge (\bigvee a_n') = \bigvee (a \wedge a_n') = \bigvee (a - a_n)$$

teda platí (1). Ďalej nech $x \geqq y$, $x \wedge y' = x - y \leqq u - u = u \wedge u' = 0$.

Potom

$$x = (x \wedge y) \vee (x \wedge y') = y \vee (x \wedge y') = y \vee 0 = y.$$

Nakoniec nech $x \leqq y$. Potom

$$z \wedge y - z \wedge x = z \wedge y \wedge (z \wedge x)' = z \wedge y \wedge (z' \wedge x') = 0 \vee (z \wedge y \wedge x') \leqq y \vee x' = y - x$$

teda platí aj (3).

Dôsledok 2. ([1], kap. XIV, § 10, veta 18). Nech S je δ-úplná, komutatívna l-grupa. Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká postupnosť prvkov z S, že existuje $\bigvee x_n$. Potom

$$z\wedge(\bigvee_n x_n) = \bigvee_n (z\wedge x_n).$$

Dôkaz. V tomto prípade kladieme $a - b = a + (-b)$, kde $-b$ je prvok opačný k prvku b. Opäť stačí dokázať (1) — (3). Nech existuje $\bigvee a_n$. Potom $\bigvee a_n \geqq a_n$ pre všetky n, teda $a - \bigvee a_n \leqq a - a_n$ pre všetky n. Na druhej strane, ak $c \leqq a - a_n$ pre všetky n, tak $a_n \leqq a - c$ pre všetky n, odkiaľ dostávame, že $\bigvee a_n \leqq a - c$, čiže $c \leqq a - \bigvee a_n$. Vidno, že $a - \bigvee a_n$ je najväčším dolným ohraničením postupnosti $\{a - a_n\}_{n=1}^{\infty}$, t. j. $a - \bigvee a_n = \bigwedge (a - a_n)$.

Ďalej, ak $x \geqq y$, $x - y \leqq u - u = 0$, tak $x \geqq y$ a súčasne $x \leqq y$, teda $x = y$. Nakoniec nech $x \leqq y$. Potom

$$(z\wedge y) + x = (z + x)\wedge(y + x) \leqq (z + y)\wedge(x + y) = (z\wedge x) + y$$

odkiaľ

$$z\wedge y - z\wedge x \leqq y - x.$$

Literatúra

[1] Birkhoff, G. : Lattice Theory. New York 1948.
[2] MacLane, S.—Birkhoff, G.; Algebra. Bratislava 1973.