ÚLOHY A PROBLÉMY

Rubriku vedie Štefan Znám, 816 31 Bratislava, Mlynská dolina. Riešenia úloh uvedených v tomto zväzku pošlite na adresu vedúceho rubriky do 31. VIII. 1974.

B 21. Nech $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ je postupnosť všetkých prvočísel. Dokážte, že pre $n > 3$ platí

$$\prod_{i=1}^{n} p_i > p_{n+1}^2$$

Š. Porubský

B 22. Nájdite všetky prirodzené čísla n s vlastnosťou

$$(\underset{m<n}{\forall} (m, n) = 1) \Rightarrow m \text{ je prvočíslo}$$

Š. Porubský

B 23. Nech E, E' sú dva lineárne normované priestory. Operátor $T : E \rightarrow$ $\rightarrow E'$ nazýva sa aditívny, ak pre každé dva prvky $x, y \in E$ je $T(x + y) =$ $= T(x) + T(y)$; T sa nazýva homogénny, ak pre každé $x \in E$ a reálne α platí $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Ak dimenzia $E = 1$ a E je reálny lineárny normovaný priestor, tak každý homogénny operátor $T : E \rightarrow E'$ je aditívny a spojitý. Dokážte to!

T. Šalát

B 24. Nech E_m značí m-rozmerný euklidovský priestor s obvyklou normou

$$||x|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \xi_k^2}$$

$(x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in E_m)$. Zostrojte operátor $T: E_2 \rightarrow E_1$ ktorý je homogénny a spojitý, ale nie je aditívny.

T. Šalát

B 25. Dokážte: ak dim $E \geqq 2$, dim $E' \geqq 1$, tak existuje taký operátor $T: E \rightarrow E'$, že T je homogénny a spojitý, ale nie aditívny operátor.

T. Šalát

B 26. Nech (M, ϱ) je metrický priestor. Zobrazenie $g: M \to M$ sa nazýva izometria ak je bijektívne a ak naviac platí

$$\forall\, x, y \in M : \varrho(x, y) = \varrho(g(x), g(y)).$$

Množina $G(M, \varrho)$ všetkých izometrií metrického priestoru (M, ϱ) tvorí grupu (voči skladaniu).

a) Nájdite (M, ϱ) tak, aby grupa $G(M, \varrho)$ bola izomorfná s grupou Z_n zvyškových tried podľa modulu n.

b) Pre aké prirodzené n existuje priestor (M, ϱ) tak, že $G(M, \varrho)$ je izomorfná so Z_n a súčasne platí

$$\forall\, x, y \in M, \exists\, g \in G(M, \varrho) : g(x) = y.$$

M. Hejný

Poznámky k problémom zo 4. čísla Matematických obzorov

Niekoľkí čitatelia nás upozornili, že problém *B.15* by bolo vhodné doplniť podmienkou $a \neq u$. Za správne riešenie považujeme aj riešenie pôvodnej aj takto doplnenej úlohy.

Podobne sme postupovali aj v probléme *B.20*, kde v pôvodnom zadaní tvrdenie je neplatné, ale platí pre kladné u.

Správne riešenia problémov zo 4. čísla Matematických obzorov:

Dr. M. Franek, Gymnázium, Prievidza: *B.15*, *B.16*. *B.17*, *B.18*, *B.19*, *B.20*.
Anton Hnáth, Gymnázium, Michalovce: *B.16*, *B.17*, *B.18*.
Ľudovit Hrdina, Bratislava, Žilinská 16: *B.16*, *B.18*.
Pavel Hrnčiar, Bratislava, ŠD Ľ. Štúra: *B.15*, *B.16*, *B.18*, *B.20*.
Pavel Valent, ZDŠ, Žemberovce: *B.17*, *B.18*.
Peter Vrábel, Nitra, Pedagogická fak.: *B.17*, *B.18*, *B.19*, *B.20*.
Michal Zajac, Bratislava, Prírodoved. fak. UK: *B.15*, *B.16*, *B.17*, *B.18*, *B.20*.