O POSTUPNOSTIACH PRIRODZENÝCH ČÍSEL S OHRANIČENOU VEĽKOSŤOU PRVOČÍSELNÝCH DELITEĽOV

PAVEL KOSTYRKO, Bratislava

Cieľom tohto článku bude podať dôkaz nasledujúcej vety.

Veta. Nech n je prirodzené číslo a nech $m(n)$ udáva počet členov najdlhšej postupnosti po sebe idúcich prirodzených čísel, z ktorých každé má prvočíselné delitele len prvočísla $\leqq p_n$ ($\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť všetkých prvočísel). Potom $m(n) = p_{n+1} - 1$, pričom existuje práve jedna postupnosť s požadovanou vlastnosťou, a to postupnosť $\{1, 2, \ldots, p_{n+1} - 1\}$.

Dôkaz. Nech n je ľubovoľné prirodzené číslo. Pretože každé z čísel $1, 2, \ldots, p_{n+1} - 1$ má prvočíselné delitele iba prvočísla $\leqq p_n$, zrejme $m(n) \geqq p_{n+1} - 1$. Ostrá nerovnosť však nemôže nastať, pretože členy každej aspoň p_{n+1}-člennej postupnosti po sebe idúcich prirodzených čísel dávajú pri delení číslom p_{n+1} zvyšky všetky čísla $0, 1, 2, \ldots, p_{n+1} - 1$ a tak niektorý z nich je násobkom čísla p_{n+1}, t. j. má deliteľa prvočíslo $p_{n+1} > p_n$. Teda $m(n) = p_{n+1} - 1$.

V ďaľšom ukážeme, že existuje práve jedna $(p_{n+1} - 1)$-členná postupnosť po sebe idúcich prirodzených čísel s vlastnosťou, že každý jej člen má prvočíselné delitele iba prvočísla $\leqq p_n$.

Na základe vykonaných úvah má požadovaná postupnosť nutne tvar

$$\{ap_{n+1} + 1, \quad ap_{n+1} + 2, \ldots, ap_{n+1} + (p_{n+1} - 1)\} \tag{1}$$

kde a je celé nezáporné číslo. Ak $a = 0$, dostávame postupnosť $\{1, 2, \ldots \ldots, p_{n+1} - 1\}$, ktorá má požadované vlastnosti. Ukážeme, že za predpokladu $a > 0$ niektorý člen postupnosti (1) má prvočíselného deliteľa $p > p_n$. Použijeme na to nasledujúce tvrdenie, známe z teórie čísel: Ak $N > K$, tak v postupnosti prirodzených čísel $\{N, N + 1, N + 2, \ldots, N + K - 1\}$ existuje aspoň jedno číslo, ktoré má prvočíselného deliteľa $> K$ (pozri [1], str. 401). Stačí v uvedenom tvrdení položiť $N = ap_{n+1} + 1$ a $K = p_{n+1} - 1$. Ak $a > 0$, tak $N > K$, a teda v postupnosti (1) existuje člen s prvočíselným deliteľom $p > K = p_{n+1} - 1 \geqq p_n$.

Tým je dôkaz vety skončený.

Poznámka. V súvislosti s uvedenou vetou objavuje sa tento problém: Nech n je prirodzené číslo a nech $M(n)$ udáva počet členov najdlhšej

postupnosti po sebe idúcich prirodzených čísel, z ktorých každé má prvo
číselného deliteľa $p \leqq p_n$. Určiť $M(n)$, ako aj všetky $M(n)$-členné postup
nosti po sebe idúcich prirodzených čísel s požadovanou vlastnosťou. V mono
grafii [1], str. 362, príklad 29 sa udáva v prípade $n > 1$ dolné ohraničeni
pre funkciu $M(n)$: $M(n) \geqq 2p_{n-1} - 1$.

Literatúra

[1] Sierpiński W.: Teoria liczb II, Warszawa 1959.