O DELITEĽNOSTI POSTUPNOSTÍ PRIRODZENÝCH ČÍSEL

PAVEL BARTOŠ, BRATISLAVA

Definícia. Nech $\{a_i\}_1^n$, $\{b_i\}_1^n$, $n \geqq 1$ sú postupnosti prirodzených čísel. Vravíme, že

$$\{a_i\}_1^n \mid \{b_i\}_1^n \tag{1}$$

vtedy a len vtedy, keď

$$a_i \mid b_i, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

Ak $n = 1$, ide o deliteľnosť prirodzených čísel.

V ďalšom dokážeme vetu, naznačujúcu, že táto definícia môže priniesť nové poznatky v teórii čísel.

Veta. Nech rastúce postupnosti prirodzených čísel $\{a_i\}_1^n$, $\{b_i\}_1^n$, $n > 1$, majú tú istú postupnosť prvých diferencií a nech $a_1 \neq b_1$. Potom platí (1) práve vtedy, keď

$$b_i = (uMa_1/a_i + 1)\, a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

kde u je ľubovoľné prirodzené číslo a

$$M = \left[\frac{a_2}{(a_1, a_2 - a_1)}, \frac{a_3}{(a_1, a_3 - a_1)}, \ldots, \frac{a_n}{(a_1, a_n - a_1)}\right] \tag{4}$$

Dôkaz. Podľa predpokladu $a_i - a_{i-1} = b_i - b_{i-1} = d_{i-1} > 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Položme $\delta_1 = 0$, $\delta_i = d_1 + d_2 + \ldots + d_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, potom platí

$$a_i = a_1 + \delta_i, \; b_i = b_1 + \delta_i, \; i = 1, 2, \ldots n \tag{5}$$

Existujú teda také prirodzené čísla k_i, že

$$b_1 + \delta_i = k_i(a_1 + \delta_i), \; k_i \neq 1, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

Pretože $b_1 = k_1 a_1$, vyplýva zo (6)

$$k_1 = \frac{(k_i - 1)\,\delta_i}{a_1} + k_i \tag{7}$$

z čoho je zrejmé, že

$$k_i - 1 = t_i a_1/(a_1, \delta_i) \tag{8}$$

kde t_i je prirodzené číslo. Zo (7) po malej úprave máme potom

$$k_1 = t_i \frac{a_i}{(a_1, a_i - a_1)} + 1, \qquad i = 2, 3, \ldots, n \tag{9}$$

Pretože $(a_1, a_i - a_1) \mid a_i$, je k_1 prirodzené číslo. Z (9) vyplýva platnosť (3) a (4) pre $i = 1$, lebo (9) platí pre všetky $i = 2, 3, \ldots, n$.

Dosadením (9) do (8) máme potom

$$k_i = \frac{uMa_1}{a_i} + 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

teda (3) a (4) platí pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$. Nutnosť týchto podmienok je tým dokázaná. K ich postačiteľnosti stačí dokázať, že k_i sú prirodzené čísla. Pretože $(a_1, a_i - a_1) \mid a_1$, platí $a_i \left| \frac{a_i a_1}{(a_1, a_i - a_1)} \right.$, teda $a_i \mid Ma_1$. Ľahko sa tiež zistí, že $b_i - b_{i-1} = a_i - a_{i-1}$. Tým je veta dokázaná.

Dôsledok. Vo zvláštnom prípade možno použiť vetu na aritmetické postupnosti prirodzených čísel prvého stupňa s touže kladnou diferenciou.