# ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Vojtech Filo, Piešťany, Lúčna 14; úlohy spolu s riešeniami prosíme posielajte na jeho adresu.

*Úloha A7* (autor P. Bartoš).

Nech $n$ je kladné reálne a $m$ prirodzené číslo. Potom platí

$$\binom{n+m}{m} \geqq \frac{2^{m+1}n^m}{n^m + m!}$$

a rovnosť platí len vtedy, keď $n = m = 1$.

Dôkaz: Pre $n = m = 1$ máme $\binom{2}{1} = \frac{2^2 \,.\, 1}{1^1 + 1!}$, čo zrejme platí, a to so znakom rovnosti. Pre $m > 1$ máme podľa vety 1 a 2 $(n + m)(n + m - 1) \ldots$ $\ldots (n + m - m - 1) \geqq 2^m \sqrt{n^m \,.\, m!}$ a rovnosť by mohla platiť len vtedy, keď $n = m$ a súčasne $n = m - 1$, čo je nemožné. Platí teda vždy ostrá nerovnosť. Ďalej podľa prvej vety $n^m + m! \geqq 2\sqrt{n^m m!}$ a podľa vety 2 $(n + m)(n + n - 1) \ldots [n + m - (m - 1)] (n^m + m!) > 2^{m+1} n^m m!$ odkiaľ vyplýva dokazovaná nerovnosť pre ľubovoľné $n$ a $m > 1$. Ešte treba túto nerovnosť dokázať pre $m = 1$ a $n \neq 1$. Avšak z nerovnosti $(n - 1)^2 > 0$, ktorá teraz platí, vyplýva $(n + 1)^2 > 4n$, teda $n + 1 = \binom{n+1}{1} > \frac{2^2 n^1}{n^1 + 1!}$, a teda dokazovaná nerovnosť i teraz platí. Tým je úloha dokázaná.

Poznámka 7.1. Pred preberaním tejto úlohy treba zaviesť definíciu $\binom{n}{m}$ pre reálne $n$ a nezáporné celé $m$ takto:

1. $\binom{n}{0} = 1$ pre každé reálne $n$,
2. $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1) \ldots (n - m + 1)}{m!}$ pre každé reálne $n$ a každé prirodzené $m$.

Ak to urobiť nechceme, treba vo výrobku $n$ obmedziť na prirodzené čísla.

Poznámka 7.2. Nerovnosť možno písať aj vo forme

$\binom{n}{m} \geqq \frac{2^{m+1}(n-m)^m}{(n-m)^m + m!}$, $n$, $m$, prirodzené číslo a úlohu zadať v tejto forme.

*Úloha A8* (autor P. Bartoš).

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n$ platí

$$\binom{2n}{n} \geqq \frac{2^{2n}}{n+1}$$

pričom rovnosť platí len keď $n = 1$.

Dôkaz: Pre $n = 1$ máme $\binom{2}{1} = \frac{2^2}{2}$, čo je správne. Pre $n > 1$ použime nerovnosť z *úlohy A1* voliac $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ... $a_n = n$. Vtedy platí (len ostrá) nerovnosť

$$(1 + 2)(2 + 3) \dots (n - 1 + n)(n + 1) > 2^n . 1 . 2 \dots n$$

Násobme obe strany číslom $2.4.6 \dots (2n - 2) . 2n . 2^n . n!$
Dostaneme $(2n)!\,(n + 1) > 2^{2n}(n!)^2$,
odtiaľ

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{2^{2n}}{n+1}, \text{ čiže } \binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{n+1}$$

Tým je tvrdenie dokázané.

*Úloha A9* (autor P. Bartoš).

Ak $a, b, c$ sú kladné čísla, tak $\frac{1}{64}(a + 2b + c)(b + 2c + a)(c + 2a + b) \geqq \geqq \frac{1}{8}(a + b)(b + c)(c + a) \geqq abc$, pričom rovnosť platí len vtedy, keď $a = b = c$ (a to v oboch znakoch súčasne).

Dôkaz: Podľa vety 1.

$a + 2b + c = (a + b) + (b + c) = 2\sqrt{(a + b)(b + c)}$ (rovnosť pri $a + b = b + c$, teda $a = c$)

$b + 2c + a = (b + c) + (c + a) = 2\sqrt{(b + c)(c + a)}$ (rovnosť pri $a = b$)

$c + 2a + b = (c + a) + (a + b) = 2\sqrt{(c + a)(a + b)}$ (rovnosť pri $b = c$)

Podľa vety 2 máme potom prvú časť dokazovanej nerovnosti. Druhá časť nerovnosti platí podľa *úlohy A1* pri voľbe $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $n = 3$.

Poznámka 9,1. Nerovnosť platí aj pre nezáporné čísla $a, b, c$ s nezmenenou podmienkou rovnosti.