O EXPONENCIÁLNEJ A LOGARITMICKEJ FUNKCII

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

V komentároch pre vyučovanie matematiky na gymnáziách podľa učebníc SVŠ sa na niekoľkých miestach spomína možnosť zavedenia elementárnych funkcií pomocou nekonečných radov. Taká definícia by bola zvlášť výhodná pri goniometrických funkciách, pretože by zdôraznila, že napr. sínus je reálna funkcia reálnej premennej. V tomto príspevku ukážeme, ako možno jednoduchým spôsobom pomocou nekonečných radov definovať exponenciálnu funkciu.

Pravdaže, v stredoškolskej praxi ťažko budeme môcť použiť podobný prístup, takže tento článok má zmysel skôr odborný ako metodický. Naproti tomu od čitateľa nepredpokladáme špeciálne vedomosti, takže článku by mohli porozumieť aj žiaci III. triedy gymnázia.

1. Nekonečné rady

V tejto časti sa dotkneme dvoch otázok: d'Alembertovho kritéria konvergencie a súčinu nekonečných radov. D'Alembertovo kritérium je všeobecne známe, musíme ho však znovu a starostlivo dokázať, aby sme v jeho dôkaze nepoužili existenciu exponenciálnej alebo logaritmickej funkcie.

Veta 1' (d'Alembertovo kritérium). Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká postupnosť kladných čísel, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Potom nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Dôkaz. Pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, existuje také číslo q, že $0 < q < 1$ a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq q$$

pre všetky $n \geqq m$. Teda

$$a_{m+1} \leqq qa_m$$

$$a_{m+2} \leqq qa_{m+1} \leqq q^2 a_m$$

$$a_{m+3} \leqq qa_{m+2} \leqq q^3 a_m$$

$$\dots$$

$$a_{m+p} \leqq q^p a_m$$

$$\dots$$

Pre čiastočný súčet $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (kde $n \geqq m$, $p = n - n$) potom máme

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{m+p} a_i \leqq \sum_{i=1}^{m-1} a_i + a_m \sum_{i=1}^{p} q^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} a_i + a_m q \frac{1-q^p}{1-q} \leqq \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \frac{a_m q}{1-q}$$

(V prípade, že $0 < q < 1$ totiž platí $1 - q^p < 1$.) Pretože postupnosť čiastočných súčtov $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a ohraničená zhora, nekonečný rad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje.

(V dôkaze predošlej vety sa obvykle používa známa skutočnosť, že geometrický rad s kvocientom $q \in (0,1)$ konverguje. Tak sme to vlastne urobili aj my a v tomto dôkaze sa nepoužila existencia logaritmov. Pravda, obvykle sa dokáže navyše, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}$, a to na základe vzťahu $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ ($|q| < 1$). A k dôkazu posledného vzťahu sa použije existencia logaritmov.)

Súčin nekonečných radov už nie je natoľko známy. Ujasnime si jeho definíciu. Majme dva nekonečné rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Aby sme ich vynásobili. utvoríme schému

$$\begin{array}{l}
a_0b_0,\ a_0b_1,\ a_0b_2,\ a_0b_3,\ \ldots,\ a_0b_n,\ \ldots \\
a_1b_0,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_1b_3,\ \ldots,\ a_1b_n,\ \ldots \\
a_2b_0,\ a_2b_1,\ a_2b_2,\ a_2b_3,\ \ldots,\ a_2b_n,\ \ldots \\
a_3b_0,\ a_3b_1,\ a_3b_2,\ a_3b_3,\ \ldots,\ a_3b_n,\ \ldots \\
\ldots \\
a_nb_0,\ a_nb_1,\ a_nb_2,\ a_nb_3,\ \ldots,\ a_nb_n,\ \ldots \\
\ldots
\end{array}$$

Súčin nekonečných radov by mal obsahovať všetky členy uvedenej schémy. Pri sčítaní ich usporiadame tak, že začneme z ľavého horného rohu a postupujeme po uhlopriečkach, teda

$$a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + (a_3b_0 + a_2b_1 + $$
$$+ a_1b_2 + a_0b_3) + \ldots + (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \ldots + a_1b_{n-1} + a_0b_n) + \ldots$$

Definícia. Súčinom nekonečných radov $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ rozumieme nekonečný rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, kde

$$c_n = a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \ldots + a_1b_{n-1} + a_0b_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n-i}b_i$$

Veta 2'. Ak $a_n \geqq 0$, $b_n \geqq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ a rady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergujú, potom ich súčin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje, pričom

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Táto veta je dokázaná napr. v knihe I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec; Matematika II.

Príklad 1. Vynásobme nekonečné rady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. V oboch prípadoch ide o geometrický rad s kvocientom 1/2, teda konvergentný rad, pričom

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

(Tento príklad slúži len na objasnenie pojmu, nebudeme ho v ďalšom používať.) Máme

$$c_n = a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \ldots + a_{n-i}b_i + \ldots + a_1b_{n-1} + a_0b_n =$$
$$= \frac{1}{2^n} \cdot 1 + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + 1 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$$

Z predošlej vety teda dostávame, že $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ je konvergentný, pričom

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right) = 2.2 = 4$$

Príklad 2. Vynásobiť nekonečné rady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2_n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ (Konvergencia sa zistí pomocou d'Alembertovho kritéria.) Máme

$$c_0 = a_0b_0 = 1.1 = 1$$

$$c_1 = a_1b_0 + a_0b_1 = \frac{2}{1!} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{3}{1!} = \frac{5}{1!}$$

$$c_2 = a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = \frac{2^2}{2!} \cdot 1 + \frac{2}{1!} \cdot \frac{3}{1!} + 1 \cdot \frac{3^2}{2!} =$$

$$= \frac{2^2 + 2 \,.\, 2 \,.\, 3 + 3^2}{2!} = \frac{(2+3)^2}{2!} = \frac{5^2}{2!}$$

$$c_3 = a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3 = \frac{2^3}{3!} \cdot 1 + \frac{2^2}{2!} \cdot \frac{3}{1!} + \frac{2}{1!} \cdot \frac{3^2}{2!} +$$

$$+ 1 \cdot \frac{3^3}{3!} = \frac{2^3 + 3 \,.\, 2^2 \,.\, 3 + 3 \,.\, 2 \,.\, 3^2 + 3^3}{3!} = \frac{(2+3)^3}{3!} = \frac{5^3}{3!}$$

Per analogiam $c_n = \frac{5^n}{n!}$, teda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\right)$$

Posledný vzťah by nás mal inšpirovať k definícii exponenciálnej funkcie $\left(\text{napr. } e^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \text{ a pod.}\right)$. Pripomeňme ešte, že vety 1′, 2′ platia nielen pre rady s nezápornými členmi, ale aj pre rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, pre ktoré sú $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergentné (tzv. absolútne konvergentné rady).

2. Exponenciálna funkcia s prirodzeným základom a prirodzený logaritmus

Pomocou d'Alembertovho kritéria ľahko zistíme, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverguje. To nás oprávňuje k nasledujúcej definícii.

Definícia. Znakom e budeme označovať súčet nekonečného radu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Pre ilustráciu možno e približne vypočítať. Napr.

$$S_5 = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{5!} = 2{,}716$$

$$|e - S_5| = e - S_5 = \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \dots = \frac{1}{6!}\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{8 \,.\, 7} + \dots\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{6!}\left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots\right) = \frac{1}{6!} \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{7}{6 \,.\, 6!} < 0{,}0002$$

Je tiež zrejmé, že rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje absolútne pre každé $x \in R$.

Definícia. Pre každé $x \in R$ definujeme $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Označenie e^x má svoje výhody, ale aj nevýhodu spočívajúcu v tom, že tým istým znakom označujeme číslo e^x ako aj funkciu $\{[x, y];\ y = e^x\}$ nabodúdajúcu v bode x hodnotu e^x. My budeme v ďalšom túto funkciu označovať znakom $x \to e^x$, jej hodnotu v bode x znakom e^x.

Veta 1.
1. Pre všetky $x, y \in R$ je $e^{x+y} = e^x \,.\, e^y$.
2. Pre všetky $x \in R$ je $e^x > 0$; $e^1 = e$.
3. Funkcia $x \to e^x$ je rastúca.

Dôkaz. Rovnosť $e^{x+y} = e^x \,.\, e^y$ dokážeme podobne ako sme v príklade 2 dokázali, že $e^5 = e^2 \,.\, e^3$. Nech $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ je súčinom radov $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$.

Potom

$$c_n = \frac{x^n}{n!} \cdot 1 + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \frac{y}{1!} + \dots + \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} \frac{y^i}{i!} + \dots + 1 \,.\, \frac{y^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(x^n + \frac{n!}{(n-1)!1!} x^{n-1}y + \dots + \frac{n!}{(n-i)\,!i!} x^{n-i}y^i + \dots + y^n\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{i} x^{n-i}y^i + \dots + y^n\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}(x + y)^n$$

Preto podľa *vety 2'* je

$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = e^x \,.\, e^y$$

Rovnosť $e^1 = e$ je zrejmá. Ak je $x \geqq 0$, tak $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots \geqq 1$, teda $e^x > 0$. Ak je $x < 0$, tak $1 = e^0 = e^{x-x} = e^x \,.\, e^{-x}$. Pretože $e^{-x} > 0$, je aj $e^x > 0$.

Ak $x < y$, tak $y - x > 0$, teda $e^y \,.\, e^{-x} = e^{y-x} = 1 + \frac{(y-x)}{1!} + \ldots > 1$, teda $e^y \,.\, e^{-x} > 1$. Odtiaľ vyplýva, že $e^y = e^y \,.\, e^{-x} \,.\, e^x > e^x$.

Dôsledok. $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

Dôkaz. $e^x = e^{(x-y)+y} = e^{(x-y)} \,.\, e^y$.

Veta 2. Funkcia $x \to e^x$ je spojitá v každom bode $x \in R$.

Dôkaz. Najprv dokážeme, že $x \to e^x$ je spojitá v bode $x = 0$. Nech $\varepsilon > 0$. Zvoľme $\delta < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, $0 < \delta < 1$. Nech $|x| = |x - 0| < \delta$. Potom

$$|e^x - e^0| = \left|1 + \frac{x}{1!} + \ldots - 1\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \leqq \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon.$$

Nech $x_0 \in R$ je teraz ľubovoľné. Podľa predošlého k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre všetky z, pre ktoré $|z| < \delta$, platí

$$|e^z - 1| < \frac{\varepsilon}{e^{x_0}}$$

Nech $|x - x_0| < \delta$. Potom

$$|e^x - e^{x_0}| = e^{x_0}\,|e^{x-x_0} - 1| < e^{x_0} \,.\, \frac{\varepsilon}{e^{x_0}} = \varepsilon$$

Veta 3. Množina hodnôt funkcie $x \to e^x$ je $R^+ = (0, \infty)$.

Dôkaz. 1. Nech $y \geqq 1$. Potom $e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \ldots > y$. Na druhej strane

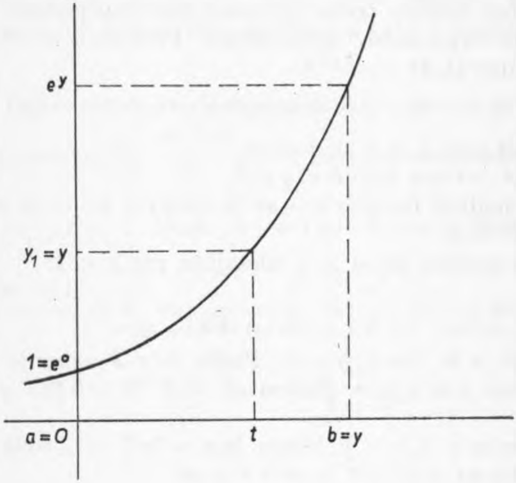
$$e^0 = 1 \leqq y,$$

teda

$$e^0 \leqq y \leqq e^y.$$

Teraz použijeme tzv. Bolzanovu—Cauchyho vlastnosť spojitých funkcií, o ktorej sa hovorí napr. v učebnici matematiky pre III. ročník SVŠ: Ak f je spojitá v intervale $\langle a, b\rangle$ a $f(a) \leqq c \leqq f(b)$, tak existuje $t \in \langle a, b\rangle$, také, že $f(t) = c$. V našom prípade je $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = y$, $c = y$. Preto existuje také $t \in R$ (dokonca $t \in \langle 0, y\rangle$, ale to nie je podstatné), že $e^t = y$.

2. Nech $0 < y < 1$. Potom $\dfrac{1}{y} > 1$, existuje teda t také, že $e^t = \dfrac{1}{y}$. To ale znamená, že $y = e^{-t}$.



Obr. 1.

Dokázali sme teda, že funkcia $x \to e^x$ je prostá a zobrazuje množinu $R = (-\infty, \infty)$ na množinu $R^+ = (0, \infty)$.

Definícia. Funkciu inverznú k funkcii $x \to e^x$ nazývame prirodzeným logaritmom a označujeme znakom ln, teda $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$.

Z definície ln vyplýva, že $x = e^{\ln x}$. Definičným oborom funkcie ln je množina $R^+ = (0, \infty)$, oborom hodnôt množina $R = (-\infty, \infty)$.

Veta 4.

1. Pre všetky $x, y \in R^+$ je $\ln xy = \ln x + \ln y$.
2. $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.
3. ln je rastúca funkcia.
4. $x = \ln e^x$.

Dôkaz.

1. $x = e^{\ln x}$, $y = e^{\ln y} \Rightarrow xy = e^{\ln x + \ln y}$.

Na druhej strane $xy = e^{\ln xy}$.

2. $e^0 = 1, e^1 = e$.
3. Nech $x < y$. Keby $\ln x \geqq \ln y$, tak by $x = e^{\ln x} \geqq e^{\ln y} = y$.
4. Ak do vzťahu $e^{\ln y} = y$ položíme $y = e^x$, dostaneme $e^x = e^{\ln e^x}$.

3. Exponenciálna funkcia a logaritmická funkcia s ľubovoľným základom

Exponenciálnu funkciu treba definovať tak, aby platilo: mocniny umocňujeme tak, že exponentov vynásobíme. Pretože $a = e^{\ln a}$, vidno, že je prirodzené definovať $a^x = e^{x \ln a}$.

Definícia. Pre $a > 0$, $x \in R$ definujeme $a^x = e^{x \ln a}$.

Veta 5. Nech $a \neq 1$, $a > 0$. Potom
1. $a^{x+y} = a^x \,.\, a^y$ pre každé $x, y \in R$.
2. Množina hodnôt funkcie $x \to a^x$ je interval $R^+ = (0, \infty)$.
3. $a^1 = a, a^0 = 1$.
4. $x \to a^x$ je rastúca pre $a > 1$, klesajúca pre $a < 1$.

Dôkaz.
1. $a^x \,.\, a^y = e^{x \ln a} \,.\, e^{y \ln a} = e^{(x+y) \ln a} = a^{x+y}$.
2. Zrejme $a^x > 0$. Nech $y > 0$. Podľa *vety 2* existuje také $u \in R$, že $e^u = y$. Položme $x = u/\ln a$. Potom $a^x = e^{x \ln a} = e^u = y$. Tvrdenie 3 je zrejmé.
4. Nech napr. $a > 1, x < y$. Potom $\ln a > \ln 1 = 0$, teda $x \ln a < y \ln a$, v dôsledku čoho $a^x = e^{x \ln a} < e^{y \ln a} = a^y$.

Poznámka. Z *vety 5* vyplýva napr. existencia n-tej odmocniny z kladného čísla a. Je to číslo $a^{1/n}$.

Veta 6. Nech $a \neq 1, a > 0$. Potom $(a^x)^y = a^{xy}$.

Dôkaz. Najprv si uvedomme, že $\ln a^x = \ln e^{x \ln a} = x \ln a$. Preto $(a^x)^y = e^{y \ln a^x} = e^{xy \ln a} = a^{xy}$.

Definícia. Nech $a > 0$, $a \neq 1$. Inverznú funkciu k funkcii $x \to a^x$ budeme značiť znakom $\log_a$, teda $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$; $x = a^{\log_a x}$.

Veta 7. Nech $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, x ľubovoľné. Potom $\log_a b^x = x \log_a b$.

Dôkaz. $b^x = (a^{\log_a b})^x = a^{x \log_a b}$, odkiaľ $\log_a b^x = \log_a a^{x \log_a b} = x \log_a b$.

Veta 8. Nech $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$. Potom

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Dôkaz. $\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \,.\, \log_b a$

Veta 9. Nech $a > 0$, $a \neq 1$. Potom
1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ pre všetky $x, y \in R^+$.
2. $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.
3. Funkcia $x \to \log_a x$ je rastúca pri $a > 1$, klesajúca pri $a < 1$.
4. $\log_a a^x = x$.

Dôkaz. Vyplýva z *vety 4* a *vety 8.*

Poznámka 1. Spojitosť funkcie $x \to a^x = e^{x \ln a}$ vyplýva z vety o spojitosti zloženej funkcie, spojitosť $\log_a$ vyplýva z vety o spojitosti inverznej funkcie.

Poznámka 2. Dôkaz toho, že derivácia funkcie $x \to e^x$ je e^x sa robieva obvykle pomocou vzťahu $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. To dokážeme ľahko. Nech $\varepsilon > 0$. Zvoľme $\delta < \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}$, $\delta < 1$. Nech $|x| = |x - 0| < \delta$. Potom

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots \right| \leqq$$

$$\leqq \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots = \frac{\delta}{1 - \delta} < \varepsilon.$$