O NEROVNICIACH TYPU $\prod_{i=1}^{n} p_i(x) > 0$

ZOLTÁN ZALABAI, Nitra

Úvodom treba poznamenať, že ide o príspevok čiste metodický. Ukážeme metódu na riešenie nerovníc, ktorá úzko súvisí s odporúčanou metódou, uvedenou v Komentári pre učiteľov na používanie učebníc matematiky pre SVŠ v 3. ročníku gymnázia (str. 72).

Nech pre $i = 1, 2, \ldots, n$, $x \to p_i(x)$ sú funkcie premennej x.

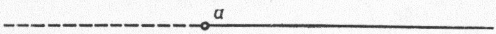
Podstata metódy spočíva v grafickom znázornení situácie. Nech pre výraz $p_1(x)$ platí:

$$p_1(x) < 0 \text{ pre } x < a$$

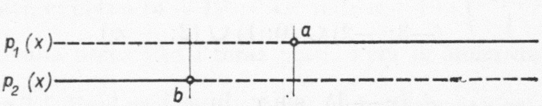
$$p_1(x) > 0 \text{ pre } x > a$$

Túto situáciu znázorníme na číselnej osi podľa *obr. 1.*

Kladná „časť" je vytiahnutá plnou čiarou, záporná „časť" čiarkovanou.



Obr. 1



Obr. 2

Riešme nerovnicu:

$$p_1(x) \,.\, p_2(x) < 0$$

Pre $p_i(x)$ nech platí:

$$p_1(x) < 0 \text{ pre všetky } x < a$$

$$p_1(x) > 0 \text{ pre všetky } x > a$$

$$p_2(x) < 0 \text{ pre všetky } x > b$$

$$p_2(x) > 0 \text{ pre všetky } x < b$$

Nech $b < a$.

Situáciu znázorníme na „roztiahnutej" číselnej osi (*obr. 2*).

Bodmi a, b sme rozdelili číselnú os na tri časti.

Z *obr. 2* vidieť:

$$\text{pre } x < b \text{ je } p_1(x) \,.\, p_2(x) < 0$$

$$\text{pre } b < x < a \text{ je } p_1(x) \,.\, p_2(x) > 0$$

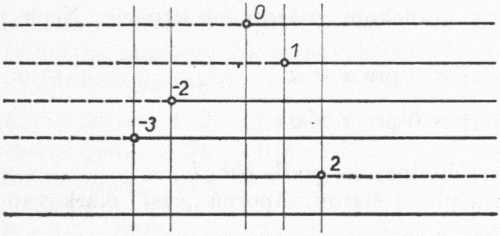
$$\text{pre } x > a \text{ je } p_1(x) \,.\, p_2(x) < 0$$

Hľadaný obor pravdivosti je: $(-\infty, b) \cup (a, +\infty)$.

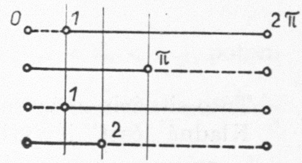
Príklad 1

$$\frac{x(x-1)(x+2)}{(x+3)(4-2x)(1+x^2)} < 0$$

Príslušný obrázok pre znázornenie situácie ľahko nakreslíme bez jediného predchádzajúceho výpočtu (*obr. 3*).



Obr. 3



Obr. 4

Hľadaný obor pravdivosti vypočítame z *obr. 3*

$$(-3; -2) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$$

Príklad 2

$$\frac{(x-1) \,.\, \sin x \,.\, \ln x}{2-x} < 0$$

(Obmedzíme sa na množinu $(0; 2\pi)$.)
Príslušný obrázok vieme hneď nakresliť (*obr. 4*).
Hľadaný obor pravdivosti — s obmedzením sa na množinu $(0; 2\pi)$ — je:

$$(2; \pi)$$

Záver. Body, v ktorých sa jednotlivé výrazy $p_i(x)$ rovnajú nule, alebo nie sú definované, rozdelia číselnú os na niekoľko intervalov. V jednotlivých intervaloch nás zaujíma iba počet čiarkovaných čiar. Výsledok je dobre kontrolovateľný.

Podobný obrázok uľahčí postup aj pri iných typoch nerovníc, ako napr.: $|x+1| + |x-2| - |4-2x| < 1$.