ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Vojtech Filo, Piešťany, Lúčna 14. Nové úlohy (s riešeniami) prosíme posielať na jeho adresu.

Úloha A 3 (autor P. Bartoš).

Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n > 2$ sú kladné čísla; potom

$$(a_1 + 2a_2 + a_3)(a_2 + 2a_3 + a_4) \ldots (a_n + 2a_1 + a_2) \geqq$$
$$\geqq 2^n(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \ldots (a_n + a_1) \geqq 2^{2n}a_1a_2 \ldots a_n$$

pričom rovnosť v prvej nerovnosti platí len v tom prípade, keď
a) pri párnom n: $a_1 = a_3 = \ldots = a_{n-1}$ a $a_2 = a_4 = \ldots = a_n$;
b) pri nepárnom n: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
Rovnosť v druhej nerovnosti platí vtedy keď $a_1 = \ldots = a_n$. Dokážte!

Dôkaz. Podľa vety 1: $a_1 + 2a_2 + a_3 = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) \geqq \geqq 2\sqrt{(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)}$ (rovnosť nastane pri $a_1 = a_3$), $a_2 + 2a_3 + a_4 = = (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) \geqq 2\sqrt{(a_2 + a_3)(a_3 + a_4)}$
(rovnosť nastane pre $a_2 = a_4$)

$$\vdots$$

$$a_n + 2a_1 + a_2 \geqq 2\sqrt{(a_n + a_1)(a_1 + a_2)} \text{ (rovnosť pri } a_n = a_2).$$

Podľa vety 2 potom dostaneme prvú dokazovanú nerovnosť (i s podmienkou rovnosti). Druhá nerovnosť platí podľa *úlohy A 1*.

Poznámka. Všetky poznámky uvedené pri *úlohe A 1* platia aj tu.

Poznámka: V dnešných úlohách sa všade odvolávame na vety z práce P. Bartoša: *Niektoré hľadiská výberu matematických úloh pre prácu v žiackych krúžkoch,* uverejnenú v Matematických obzoroch, zv. 2, str. 51—56. *Úlohy A1* a *A2* sú uverejnené tamtiež, str. 57 a 58.

Úloha A 4 (autor P. Bartoš).

Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n > 3$, sú kladné čísla. Dokážte, že

$$L = (a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4)(a_2 + 3a_3 + 3a_4 + a_5) \dots (a_n + 3a_1 + 3a_2 + a_3) \geqq 2^n(a_1 + 2a_2 + a_3)(a_2 + 3a_3 + a_4) \dots (a_n + 2a_1 + a_2) \geqq$$
$$\geqq 2^{2n}(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \dots (a_n + a_1) \geqq 2^{3n}a_1a_2 \dots a_n$$

pričom rovnosť platí pri párnom n vtedy, keď $a_1 = a_3 = \dots = a_{n-1}$, $a_2 = a_4 = \dots = a_n$ a pri nepárnom n vtedy, keď $a_1 = \dots = a_n$.

Dôkaz. Podľa vety 1 (vzhľadom na to, že $a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4 = (a_1 + 2a_2 + a_3) + (a_2 + 2a_3 + a_4)$ atď.) platí

$a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4 \geqq 2\sqrt{(a_1 + 2a_2 + a_3)(a_2 + 2a_3 + a_4)}$ (rovnosť pri $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$)

$\vdots$

$a_n + 3a_1 + 3a_2 + a_3 \geqq 2\sqrt{(a_n + 2a_1 + a_2)(a_1 + 2a_2 + a_3)}$ (rovnosť nastane pri $a_n + a_1 = a_2 + a_3$).

Z podmienok rovnosti vyplýva $a_1 - a_3 = a_3 - a_5$, $a_2 - a_4 = a_4 - a_6, \dots a_{n-3} - a_{n-1} = a_{n-1} - a_1, a_{n-2} - a_n = a_n - a_2$.

To znamená, že podľa vety 2 platí nerovnosť, pričom rovnosť nastane len vtedy, keď: pri párnom n tvoria čísla $a_1, \dots, a_{n-1}, a_1$ a aj čísla $a_2, \dots, a_n, a_2$ aritmetické postupnosti, a to je možné len vtedy ak $a_1 = \dots = a_{n-1}$, $a_2 = \dots = a_n$; pri nepárnom n musí byť $a_1 = \dots = a_n$.

Druhá a tretia nerovnosť vyplývajú z *úlohy A 3*. Tým je dôkaz ukončený.

Poznámka. Poznámky pri *úlohe A 1* platia aj tu.