METRICKÉ GEOMETRIE II

MILAN HEJNÝ, Bratislava

6. Metrický priestor s predpísanou izometrickou grupou

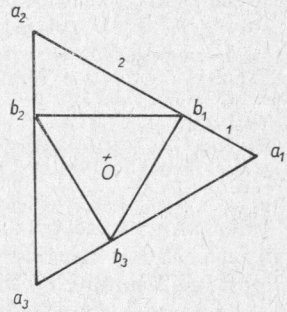
V predchádzajúcom odseku sme k danému metrickému priestoru (M, d) hľadali jeho izometrickú grupu. Teraz riešime opačnú úlohu:

Daná je (abstraktná) grupa G; nájdite metrický priestor (M, d) tak, aby $\Gamma(M, d) \approx G$.

Symbolom $\Gamma^{-1}(G)$ označíme triedu všetkých tých metrických priestorov (M, d), pre ktoré $\Gamma(M, d) \approx G$.

Príklad 8. Nájdite aspoň jeden metrický priestor $(M, d) \in \Gamma^{-1}(Z_3)$.

Riešenie. V euklidovskej rovine zvolíme 6-bodovú množinu $M = A \cup B$, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ tak ako je nazmačené na *obr. 1.*



Obr. 1

A je množina vrcholov rovnostranného trojuholníka, rovnako aj B. Oba trojuholníky majú spoločný stred 0. Bod b_1 leží vnútri úsečky a_1a_2, pričom jeho euklidovská vzdialenosť od bodu a_1 je 1, od bodu a_2 je 2. Nech teraz $d(x, y)$ je euklidovská vzdialenosť bodov $x, y \in M$. Potom d je metrika na M (lebo je to indukovaná metrika — pozri cvičenie 20). Tvrdíme, že opísaný metrický priestor (M, d) patrí do triedy $\Gamma^{-1}(Z_3)$.

Nech $f\colon M \to M$, $a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto a_1$, $b_1 \mapsto b_2 \mapsto b_3 \mapsto b_1$ je „otočenie o 120°“. Potom zrejme $f \in \Gamma(M, d)$ a $f^3 = 1_M$. Platí teda $\{1_M, f, f^2\} \subset \Gamma(M, d)$. Dôkaz bude ukončený, ak dokážeme i obrátenú inklúziu; lebo $\{1_M, f, f^2\} \approx Z_3$.

Metrika d je explicitne popísaná reláciami (cvičenie 51):

$$d(a_1, a_2) = 3,\ d(a_1, b_1) = 1,\ d(a_1, b_2) = \sqrt{7}, d(a_1, b_3) = 2,$$
$$d(b_1, b_2) = \sqrt{3};\ \forall x, y \in M;\ d(x, y) = d(fx, fy);\ \text{platí } M1 \text{ a } M2. \tag{18}$$

Zvoľme $g \in \Gamma(M, d)$ a uvažujme o bode $g(a_1)$. Predpoklad $g(a_1) \in B$ vedie k sporu s cvičením 39: $2 = \operatorname{card} k(a_1, 3) = \operatorname{card} k(g(a_1), 3) = 0$. Preto nutne $g(a_1) \in A$. Nastávajú tri možnosti:

a) $g(a_1) = a_1$, potom $g = 1_M$ (cvičenie 52).

b) $g(a_1) = a_2$, potom pre $h = f^2 \circ g \in \Gamma(M, d)$ platí $h(a_1) = a_1$ a podľa bodu a) je $h = 1_M$. Odtiaľ $g = f^3 \circ g = f \circ h = f \circ 1_M = f$.

c) $g(a_1) = a_3$, potom pre $h = f \circ g \in \Gamma(M, d)$ platí $h(a_1) = a_1$ a podľa bodu a) je $h = 1_M$. Odtiaľ $g = f^3 \circ g = f^2 \circ h = f^2 \circ 1_M = f$.

Cvičenia

51. Dokážte relácie (18).

52. Z $g(a_1) = a_1$ vyplýva $g = 1_M$. (Rada: použite cvičenie 39.)

53. Do situácie (*obr. 1*) zavedieme komplexné súradnice tak, že začiatok stotožníme so stredom 0, a_1 volíme ako kladné a b_1 položíme do prvého kvadrantu. Ukážte, že potom

$$a_1 = \sqrt{3}, \qquad a_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + 3i), \qquad a_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - 3i),$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \quad b_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i), \qquad b_3 = -i.$$

Výsledok použite na opätovné overenie relácií (18).

54. Na množine M je daná metrika d' *tabuľkou 2*. V tabuľke čítame zvyčajným spôsobom; napríklad $d'(a_1, b_2) = 6$. Dokážte že d' je skutočne metrika a nájdite grupu $\Gamma(M, d)$.

55. Ukážte že pre uvedené dve metriky platí $d \sim d'$. Čo možno z toho dedukovať podľa cvičenia 37?

Tabuľka 2

d'	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
a_1	0	8	8	5	6	7
a_2	8	0	8	7	5	6
a_3	8	8	0	6	7	5
b_1	5	7	6	0	9	9
b_2	6	5	7	9	0	9
b_3	7	6	5	9	9	0

Dokázali sme, že trieda $\Gamma^{-1}(Z_3)$ je neprázdna, lebo sme našli dokonca dva jej prvky — metrické priestory (M, d) a (M, d'), ktoré sa odlišujú iba v metrike. Všimnite si, že metrika d je názorná, ale metrika d' je krajšia, lebo neobsahuje nepríjemné čísla typu $\sqrt{3}$.

Príklad 9. Zovšeobecnenie príkladu 8. Nájdite metrický priestor

$$(M, d) \in \Gamma^{-1}(Z_n), \; n \geqq 3.$$

Riešenie. Na $2n$-bodovej množine $M = A \cup B$, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ definujeme metriku d predpisom

$$\begin{aligned} &d(x, x) = 0 \text{ pre všetky } x \in M \\ &d(a_i, a_j) = 2n + 2, \; d(b_i, b_j) = 2n + 3 && \text{pre } i \neq j \\ &d(a_i, b_j) = n + 2 + j - i && \text{pre } j \geqq i \\ &d(a_i, b_j) = 2n + 2 + j - i && \text{pre } j < i. \end{aligned} \tag{19}$$

Potom $\Gamma(M, d) \approx Z_n$. Dôkaz rozložíme do cvičení 56 až 61.

Cvičenia

56. Pre $n = 3$ je metrika (19) totožná s metrikou d' *tabuľky 2*.

57. Predpisom (19) je daná metrika.

58. Zobrazenie $f : M \to M$, dané predpisom $f(a_i) = a_{i+1}$, $f(b_i) = b_{i+1}$ pre $i = 1, \ldots, n - 1$, $f(a_n) = a_1$, $f(b_n) = b_1$ je izometria.

59. $g \in \Gamma(M, d) \Rightarrow g(a_1) \in A$.
60. $g(a_1) = a_1 \Rightarrow g = 1_M$ (t. j. $\{a_1\}$ je repér).
61. $g(a_1) = a_i \Rightarrow g = f^{-i}$. Odtiaľ už vyplýva $\Gamma(M, d) \approx Z_n$.
62. Na uvedenej množine M nájdite metriku d'', ktorá je indukovaná euklidovskou metrikou (teda zovšeobecnenie relácií (18)).

Vzniká prirodzená otázka, hľadať metrické priestory, ktorých grupa izometrií je izomorfná s grupami $Z_3 \times Z_3$, $S_3 \times Z_5$, A_5, Z, Q, R, $GE(1)$, $GE(2)$ atď. Existuje univerzálna konštrukcia, ktorá rieši všetky tie prípady, keď daná grupa nie je príliš veľká; presnejšie, mohutnosť grupy je najviac c. Nájsť uvedenú konštrukciu — to sú problémy 7 a 8. Presnú formuláciu dávajú vety.

Veta 6. Ku každej konečnej grupe G existuje metrický priestor $(M, d) \in \Gamma^{-1}(G)$ tak, že card $M = 2$ card G.

Veta 7. Ak mohutnosť grupy G nie je väčšia ako c (mohutnosť kontinua), tak trieda $\Gamma^{-1}(G)$ je neprázdna.

Predpoklad kladený vo vete 7 na mohutnosť grupy G je nepodstatný. To značí, že trieda $\Gamma^{-1}(G)$ je neprázdna pre každú grupu G. Dôkaz uvedeného tvrdenia sa robí pomocou teórie grafov.

7. Daná je grupa G. Ak $(M, d) \in \Gamma^{-1}(G)$, čo možno povedať o card M?

V tomto odseku sa obmedzíme na konečné grupy. Riešime otázku položenú v nadpise.

Veta 8. Nech $(M, d) \in \Gamma^{-1}(G)$, G konečná netriviálna grupa. Potom existuje $(M', d') \in \Gamma^{-1}(G)$ tak, že card $M' = 1 +$ card M.

Dôkaz. Podľa vety 2 existuje na M metrika $d'' \sim d$ tak, že $d''(\ddot{M}) \subset (2, 3)$. Na množine $M' = M \cup \{a\}$, $a \notin M$ definujeme metriku d' predpisom $d' \mid M^2 = d''$, $d'(x, a) = 4$ pre všetky $x \in M'$. Zobrazenie d' je skutočne metrikou, lebo $M1$ a $M2$ sú splnené evidentne a trojuholníková nerovnosť $M3$ vyplýva z faktu, že súčet ľubovoľných dvoch čísel intervalu $(2, 4]$ je väčší ako ľubovoľné tretie číslo tohto intervalu. Ak teraz $f \in \Gamma(M, d)$, tak zrejme aj $f' \in \Gamma(M', d')$, kde $f' \mid M = f$ a $f'(a) = a$. Na druhej strane ak $f' \in \Gamma(M', d')$, tak $f'(a) = a$, lebo a je jediný z bodov $w \in M'$, pre ktorý platí $k(w, 4) = M' - \{w\}$ (pozri tiež cvičenie 39). Preto potom $f = f' \mid M \in \Gamma(M, d)$. Zobrazenie $\Gamma(M, d) \to \Gamma(M', d'), f \mapsto f'$ je grupový izomorfizmus. Dokázali sme $\Gamma(M, d) \approx \Gamma(M', d')$.

Veta 9. Ku každej konečnej grupe G je možné priradiť prirodzené číslo $\nu(G)$ týchto vlastností
(i) $\forall (M, d) \in \Gamma^{-1}(G)$: card $M \geqq \nu(G)$
(ii) $\forall p \geqq \nu(G)\ \exists (M, d) \in \Gamma^{-1}(G)$: card $M = p$.

Dôkaz — pozri cvičenie 63.

Príklad 10. Vypočítajte číslo $\nu(Z_p)$, ak $p \geqq 3$ je prvočíslo.

Riešenie. Podľa vety 6 je $\nu(Z_p) \leqq 2p$. Ukážeme, že predpoklad $\nu(Z_p) < 2p$ vedie k sporu. Nech teda existuje $(M, d) \in \Gamma^{-1}(Z_p)$ tak, že card $M = m = 2p - 1$; nech g je generátor cyklickej grupy $G \approx \Gamma(M, d) \approx \approx Z_p$. Ak $x \in M$, tak orbita $G(x) = \{f(x); f \in G\}$ má buď p bodov, alebo je jednobodová (cvičenie 64). Pretože G nie je triviálna, existuje $a \in M$ tak, že $g(a) \neq a$, a preto $G(a)$ má práve p bodov. Pre ľubovoľný bod $y \notin M - G(a)$ platí: $G(a) \cap G(y) = \emptyset$, a preto je $G(y)$ jednobodová. Množina M sa teda skladá z p bodov a, $g(a), g^2(a), \ldots, g^{p-1}(a)$ a z ďalších $p - 1$ bodov $b_1, \ldots, b_{p-1}$ pre ktoré $g(b_i) = b_i$. Nech zobrazenie h: $M \to M$ je dané predpisom

$$h(b_1) = b_2, h(b_2) = b_1, h(x) = x \tag{20}$$

pre všetky $x \in M - \{b_1, b_2\}$.
Potom $h \in \Gamma(M, d)$ (cvičenie 65), a preto $\Gamma(M, d) \not\approx Z_p$. Spor.

Cvičenia

63. Dokážte vetu 9.

64. Nech $x \in M$. Potom orbita $G(x)$, pre $G \approx Z_p$ má buď 1, alebo p prvkov. Predpokladáme samozrejme, že card $M < 2p$.

65. Zobrazenie h dané predpisom (20) je izometria. (Využite toho, že zobrazenie g je izometria).

66. Na množine M, card $M = 17$ udajte metriku d tak, aby $\Gamma(M, d) \approx Z_p$, kde a) $p = 3$, b) $p = 5$, c) $p = 7$.

67. Nech $p \geqq 3$ je prvočíslo, $q = p^2$. Potom $\nu(Z_q) = 2q$.

68. Nech (M, G) je geometrický priestor, $G \approx Z_n$, $a \in M$. Potom číslo n je násobkom čísla card $G(a)$.

69. Nech $G = \Gamma(M, d)$, $a, b \in M$. Ak sú čísla card $G(a)$, card $G(b)$ nesúdeliteľné, tak $\forall x \in G(a)$, $\forall y \in G(b)$: $d(x, y) = d(a, b)$.

8. Závislosť medzi grupou $\Gamma(M, d)$ a číslom card $d(M)$

Predpokladajme, že je pevne daná konečná množina $M = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $m \geqq 2$. Ku každej metrike d na M sú priradené dva objekty: izometrická grupa $\Gamma(M, d)$, ktorú odteraz budeme značiť tiež stručne $\Gamma(d)$ a číslo card $d(M)$, ktoré budeme označovať $\tau(d)$. Najjednoduchší výsledok o väzbe oboch objektov podáva

Veta 10. Ak je $m = 2$, tak $\tau(d) = 1$ a $\Gamma(d) = T(M) \approx Z_2$.
Ak je $m \geqq 3$, tak platí

$$1 \leqq \tau(d) \leqq \frac{1}{2} m(m - 1) \tag{21}$$

$$\tau(d) = 1 \Longleftrightarrow \Gamma(d) = T(M) \approx S_m \tag{22}$$

$$\tau(d) \geqq \frac{1}{2} m(m - 3) + 3 \Rightarrow \Gamma(d) = \{1\}. \tag{23}$$

Dôkaz. Zrejmé je prvé tvrdenie vety (pre $m = 2$), vzťah (21) aj implikácia $\Rightarrow$ v (22). Zvyšné dve implikácie odložíme do cvičení 70 a 71.

Pri pohľade na relácie (22) a (23) sa zdá, ako keby medzi $\tau(d)$ a $\Gamma(d)$ bola akási „nepriama úmernosť"; čím väčšie je číslo $\tau(d)$, tým menšia je grupa $\Gamma(d)$. Z uvedených príkladov bude zrejmé, že naša hypotéza platí iba v extrémnych hodnotách $\tau(d)$. Ako vyzerá situácia vo všeobecnosti, neviem. Trochu svetla vrhne na problematiku analýza konkrétnych prípadov $m = 3$, 4 a 5. Pri analýze postupujeme takto:

1. zvolíme prirodzené $t \leqq \frac{1}{2} m(m - 1)$,

2. nájdeme všetky možné metriky na M, pre ktoré $\tau(d) = t$,

3. ku každej takej metrike d nájdeme grupu $\Gamma(d)$.

Nepríjemné miesto postupu je bod 2, pretože v ňom treba uvažovať o nekonečnom počte metrík. Na základe cvičení 22 (druhé tvrdenie) a 37 si však prácu môžeme zjednodušiť: bod 2 nahradíme bodom: 2′, nájdeme všetky možné metriky d na M, pre ktoré $d(\ddot{M}) = \{t, t + 1, t + 2, \ldots, 2t - 1\}$, $\tau(d) = t$. Takýchto metrík je už konečne veľa, pričom, samozrejme, sa zoznam grúp $\Gamma(d)$ prechodom 2. $\rightsquigarrow$ 2′. nemení. Bod 2′ postupu možno ešte ďalej ekonomizovať. To robí

Veta 11. Nech (M, d) je metrický priestor (M nie nutne konečná) a $f \in T(M)$ ľubovoľná transformácia. Potom zobrazenie

$$d' : M \times M \to R, \ (x, y) \to d(f(x), f(y)) \tag{24}$$

je metrika na M a platí $\Gamma(d) \approx \Gamma(d')$. Budeme označovať $d' = d_f$.

Dôkaz je vykonaný v cvičeniach 72 a 73.

Definícia 6. Nech card $M = m$ je konečné, $t \leqq \frac{1}{2} m(m - 1)$ prirodzené. Systém $D(M, t)$ metrík d na M nazveme charakteristickým systémom indexu t metrík na M, ak preň platí:

1. $d \in D(M, t) \Rightarrow d(\ddot{M}) = \{t, t + 1, \ldots, 2t - 1\}$.

2. Ku každej metrike d' na M existuje metrika $d \in D(M, t)$ a transformácia $f \in T(M)$ tak, že $d' \sim d_f$.

3. Ak $d, d' \in D(M, t)$, $f \in T(M)$, $d' \sim d_f$, tak $d = d'$.

Bod 2′, môžeme na základe vety 11 (a používajúc jazyk definície 6) nahradiť jednoduchším bodom 2″, nájdeme charakteristický systém indexu t metrík na M.

Príklad 11. Nech $m = 3$. Potom závislosť grupy $\Gamma(d)$ od čísla $t = \tau(d)$ podáva *tab. 3.*

Prípady $t = 1$ a 3 sú dôsledkom (22) a (23). Pre $t = 2$ je $D(M, 2) = \{d\}$, kde metrika d je daná vzťahmi $d(a_1, a_2) = d(a_1, a_3) = 2$, $d(a_2, a_3) = 3$. Preto $\Gamma(d) = \{1, f\} \approx Z_2$, pričom $f\colon (a_1, a_2, a_3) \mapsto (a_1, a_3, a_2)$.

Tabuľka 3

$\tau(d) = t =$	1	2	3
$\Gamma(d)$	S_3	Z_2	$\{1\}$

Príklad 12. Nech $m = 4$. Potom závislosť grupy $\Gamma(d)$ od čísla $t = \tau(d)$ podáva *tab. 4.*

Tabuľka 4

$\tau(d) = t =$	1	2	3	4	5	6
$\Gamma(d) \approx$	S_4	$Z_2, Z_2 + Z_2, \check{S}, S_3$	$\{1\}, Z_2, Z_2 + Z_2$	$\{1\}, Z_2$	$\{1\}$	$\{1\}$

Dôkaz tohto tvrdenia prenecháme čitateľovi do cvičení 74 až 80.

Cvičenia

70. Sporom dokážte implikáciu $\Leftarrow$ z (22). (Rada: existujú $a, b, c \in M$ tak, že $d(a, b) \neq d(a, c)$; existuje $g \in T(M)$ tak, že $g(a) = a$, $g(b) = c$.)

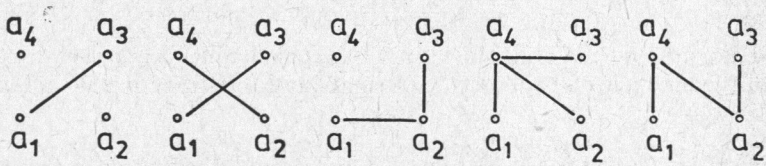
71. Sporom dokážte implikáciu (23). (Použite cvičenie 69.)

72. Zobrazenie (24) je metrika.

73. Označenie ako vo vete 11. Zobrazenie $T(M) \to T(M)$, $g \mapsto f^{-1} \circ g \circ f$ je vnútorný automorfizmus grupy $T(M)$ prevádzajúci podgrupu $\Gamma(d)$ na podgrupu $\Gamma(d')$. Odtiaľ $\Gamma(d) \approx \Gamma(d')$.

74. Prípady $t = 1, 5, 6$ *tab. 4* sú dôsledkom vety 10.

75. Na množine $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ je daných 5 metrík $d_1, \ldots, d_5$; metrika d_i je popísaná pomocou grafu „Graf i" na *obr. 2* takto:



Graf 1 Graf 2 Graf 3 Graf 4 Graf 5

vzdialenosť $d_i(a_j, a_k)$ $(j \neq k)$ sa rovná 3, ak v grafe i vrcholy a_i, a_k nie sú spojené hranou; v opačnom prípade sa táto vzdialenosť rovná 2. Napríklad $d_1(a_3, a_1) = d_4(a_2, a_4) = 2$, $d_5(a_3, a_4) = 3$, Dokážte, že $D(M, 2) = \{d_1, \ldots, d_5\}$.

76. Pri označení cvičenia 75 a označení $f, g \in T(M)$ $f : (a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto (a_3, a_2, a_1, a_4)$, $g : (a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto (a_2, a_1, a_4, a_3)$ platí: $\Gamma(d_1) = \{1, f, g \circ f \circ g, (f \circ g)^2\} \approx Z_2 + Z_2$, $\Gamma(d_2) = \{1, f, g, f \circ g, g \circ f, g \circ f \circ g, f \circ g \circ f, (g \circ f)^2\} \approx \check{S}$, $\Gamma(d_3) = \{1, f\} \approx Z_2$, $\Gamma(d_4) \approx \approx T(\{a_1, a_2, a_3\}) \approx S_3$, $\Gamma(d_5) = \{1, (g \circ f)^2\} \approx Z_2$.

77. Pre $m = 4$ existuje charakteristický systém indexu 3 metrík na M, $D(M, 3)$; tento systém má 9 prvkov. Nájdite ho! (Riešenie, samozrejme, nie je jednoznačné, stačí, ak nájdete jedno z riešení). Ďalej ukážte, že pre tri z uvedených metrík je $\Gamma(d) = \{1\}$, pre štyri z uvedených metrík je $\Gamma(d) \approx Z_2$ a pre dve z uvedených metrík je $\Gamma(d) \approx Z_2 + Z_2$.

78. Pre $m = 4$ existuje systém $D(M, 4)$ a ten má práve 9 prvkov. Pre osem z týchto deviatich prvkov platí $\Gamma(d) = \{1\}$, pre posledný z nich platí $\Gamma(d) \approx Z_2$.

79. Tak ako *obr.* 2 popisuje systém $D(M, 2)$, popíšte pomocou grafov systémy $D(M, 3)$ aj $D(M, 4)$.

80. Dokážte tvrdenie vyslovené *tab. 4.*

Problém 7. Dokážte vetu 6.

Problém 8. Dokážte vetu 7.

Problém 9. Dokážte, že pre každé prirodzené m je $\nu(Z_{4m-2}) \leqq 4m$.

Problém 10. Vypočítajte $\nu(Z_n)$ pre každé prirodzené n.

Problém 11. Nájdite a dokážte tabuľku pre $m = 5$, analogickú *tabuľkám 3* (pre $m = 3$) a *4* (pre $m = 4$).

Problém 12. Čo možno povedať o čísle $\tau(d)$, ak a) $\Gamma(d) = \{1\}$,
b) $\Gamma(d) \approx Z_2$.

Témy na samostatnú prácu

4. Hľadať číslo $\nu(G)$ pre nekomutatívne grupy G. Odporúčam začať s konkrétnymi prípadmi, napríklad A_4 či $SL(2, 3)$; pokračovať štúdiom celých tried takých grúp, napríklad A_n či $SL(2, n)$. Symbolom $SL(m, n)$ označujeme grupu všetkých matíc typu $m \times m$, ktorých prvky sú z okruhu Z_n a ktorých determinant sa rovná číslu $\bar{1} \in Z_n$.

5. Ak sa v tabuľke typu *tab. 3* či *4*, v kolónke $\Gamma(d)$, ktorá je určená číslami m a t, objaví grupa G, potom tá istá grupa sa objaví aj v kolónkach určených číslami $m +$ čosi, $t \pm$ čosi. Tento fakt sa dá empiricky pozorovať na prípadoch pre $m = 2, 3, 4$ a 5.

6. Symbolom $F(m, t)$ označíme počet rôznych grúp v kolónke určenej číslami m a t; štúdium funkcie $F(m, t)$ isto prinesie zaujímavé poznatky.