O PERMUTÁCIÁCH MNOŽINY VŠETKÝCH PRIRODZENÝCH ČÍSEL

ĽUDOVÍT NIEPEĽ — TIBOR ŠALÁT, Bratislava

Vzájomne jednoznačné zobrazenie množiny A na A voláme permutáciou množiny A.

Permutácie množiny N všetkých prirodzených čísel majú dôležitú úlohu v teórii bezpodmienečne konvergentných radov.

Označme znakom $\overline{\overline{M}}$ kardinálne číslo (mohutnosť) množiny M, znakom c kardinálne číslo množiny všetkých reálnych čísel (mohutnosť kontinua). Nech P značí množinu všetkých permutácií množiny N. Je známe, že

$$\overline{\overline{P}} = c \tag{1}$$

Dôkaz rovnosti (1) možno nájsť napr. v práci [3]. Tam uvedený dôkaz je založený na známej Riemannovej vete z teórie nekonečných radov ([2], str. 90), podľa ktorej, ak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je neabsolútne konvergentný rad s reálnymi členmi, potom ku každému $x \in (-\infty, +\infty)$ existuje taká permutácia

$$n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$$

množiny N, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = x$.

Podobne rovnosť (1) vyplýva aj z istých výsledkov prác [1] a [4] (pozri [1], veta 3; [4], veta 3,3).

Všetky uvedené odvodenia rovnosti (1) sú založené na istých poznatkoch z teórie nekonečných radov. Cieľom tejto poznámky je podať dva elementárne a podľa vedomostí autorov nové dôkazy rovnosti (1) bez použitia výsledkov z teórie nekonečných radov.

Všimnime si, že množina P je podmnožinou množiny P^* všetkých postupností prirodzených čísel a $\overline{\overline{P^*}} = c$ ([5], str. 59).

Preto

$$\overline{\overline{P}} \leqq c \tag{2}$$

Ak dokážeme, že

$$c \leqq \overline{\overline{P}} \tag{3}$$

dostaneme z (2) a (3) na základe známej Cantorovej-Bernsteinovej vety ([5], str. 30) rovnosť (1). Stačí teda dokázať (3).

Dôkaz I. Množinu N možno vyjadriť v tvare

$$N = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n \cup \ldots,$$

kde $S_n = \{2n - 1, 2n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Položme $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$. Nech f je ľubovoľné zobrazenie systému S do množiny $\{0,1\}$. Definujme $p_f \in P$ takto: Ak $f(S_n) = 0$, potom $p_f(2n - 1) = 2n - 1$, $p_f(2n) = 2n$; ak $f(S_n) = 1$, potom kladieme

$$p_f(2n - 1) = 2n, \quad p_f(2n) = 2n - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ak $f_k : S \to \{0, 1\}$ $(k = 1, 2)$ a $f_1 \neq f_2$, potom zrejme $p_{f_1} \neq p_{f_2}$.

Položme $F(f) = p_f$, ak $f : S \to \{0, 1\}$. Na základe predošlého je F vzájomne jednoznačným zobrazením množiny H všetkých funkcií $f : S \to \{0, 1\}$ do množiny P. Pretože H má kardinálne číslo c ([5], str. 140), platí (3).

Dôkaz II. Nech $B = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots\}$ je ľubovoľná nekonečná podmnožina množiny N_0 všetkých párnych prirodzených čísel. Definujme na N funkciu g_B takto:

$g_B(k_n) = 2n (n = 1, 2, \ldots)$ a ak $N - B = \{l_1 < l_2 < \ldots < l_n < \ldots\}$, potom kladieme $g_B(l_n) = 2n - 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Zrejme $g_B \in P$ a ak B_1, B_2 sú dve rôzne nekonečné podmnožiny množiny N_0, potom $g_{B_1} \neq g_{B_2}$.

Položme $G(B) = g_B$, ak B je nekonečná podmnožina množiny N_0. Na základe predošlého je G vzájomne jednoznačným zobrazením systému U všetkých nekonečných podmnožín množiny N_0 do P. Pretože U má kardinálne číslo c ([5], str. 56, veta 3 a str. 140), platí (3).

Literatúra

[1] Ganguli, P. L.—Lahiri, B. K.: Some results on certain sets of series. Czechosl. Math. J. 18 (93), (1968), 589—594.

[2] Jarník, V.: Diferenciální počet II. Praha, NČSAV 1956.

[3] Sengupta, H. M.: On rearrangements of series. Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 71—75.

[4] Šalát, T.: O niektorých problémoch z teórie nekonečných radov. Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Com. III (1958), 29—39.

[5] Sierpiński, W.: Cardinal and ordinal numbers. Warszawa, PWN 1958.