O POSTUPNOSTIACH PRIRODZENÝCH ČÍSEL S OHRANIČENÝM SÚČTOM PRVOČÍSELNÝCH DELITEĽOV

PAVEL KOSTYRKO, Bratislava

V článku [1] sa hľadá najdlhšia postupnosť po sebe idúcich prirodzených čísel, ktorých počet prvočíselných deliteľov nepresahuje dané číslo. Článok [2] je venovaný hľadaniu najdlhšej postupnosti po sebe idúcich prirodzených čísel, z ktorých každé má veľkosť svojich prvočíselných deliteľov ohraničenú daným číslom. V tomto článku podáme riešenie problému analogického problémom, akými sa zaoberali práce [1] a [2], ktorý sa však bude týkať súčtu prvočíselných deliteľov členov hľadanej postupnosti. Ukazuje sa, že metódy použité v [1] a [2] sa dajú použiť aj v tomto prípade.

V ďalšom budeme symbolom $\pi(n)$ označovať, ako je zvykom v teórii čísel, počet všetkých prvočísel menších alebo rovnajúcich sa číslu n. Nech $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť všetkých prvočísel a nech pre $n > 1$ je $P(n)$ najväčšie prirodzené číslo s vlastnosťou: Existuje $P(n)$-členná postupnosť po sebe idúcich prirodzených čísel, z ktorých každé má súčet všetkých svojich prvočíselných deliteľov menší alebo rovnajúci sa číslu n. Existenciu čísla $P(n)$ nám zaručuje skutočnosť, že postupnosť, ktorej všetky členy majú súčet všetkých svojich prvočíselných deliteľov $\leqq n$, neobsahuje členy aritmetickej postupnosti $\{kp\}_{k=1}^{\infty}$, kde p je ľubovoľné prvočíslo väčšie než n.

Veta. $P(n) = p_{\pi(n)+1} - 1$. Pre každé prirodzené $n > 1$ existuje práve jedna $P(n)$-členná postupnosť s uvedenou vlastnosťou, a to postupnosť $\{1, 2, \ldots, P(n)\}$.

Dôkaz. Pre každé prirodzené číslo a položme $S(a) = \sum_{p \mid a} p$ (symbol $\sum_{p \mid a} p$ značí súčet všetkých prvočíselných deliteľov čísla a). Nech $n > 1$ je prirodzené číslo. Dokážeme rovnosť $P(n) = p_{\pi(n)+1} - 1$. Ak $m = \pi(n)$, tak zrejme $p_m \leqq n < p_{m+1}$ a pre každé $j = 1, 2, \ldots$ platí $S\ (jp_{m+1}) > n$. Teda žiaden člen postupnosti $\{jp_{m+1}\}_{j=1}^{\infty}$ nebude vystupovať v žiadnej postupnosti čísel s vlastnosťou: Pre každý člen a postupnosti platí $S(a) \leqq n$. Tým dostávame pre číslo $P(n)$, pretože aritmetická postupnosť

$\{jp_{m+1}\}_{j=1}^{\infty}$ má diferenciu p_{m+1}, ohraničenie zhora: $P(n) \leqq p_{m+1} - 1$. V poslednej nerovnosti však platí rovnosť. Zistíme to tak, že dokážeme pre každé a ($1 \leqq a \leqq p_{m+1} - 1$) platnosť nerovnosti $S(a) \leqq n$. Za tým účelom uvedieme nasledujúce tvrdenia (A), (B) a (C).

(A) Pre každé prirodzené $r \geqq 2$ platí nerovnosť $4r - 4 \leqq 2^r$. Uvedenú nerovnosť možno ľahko dokázať matematickou indukciou vzhľadom na r. Tu jej dôkaz neuvádzame.

(B) Nech $r \geqq 2$ je prirodzené číslo a nech n_i ($i = 1, 2, \ldots, r$) sú celé čísla väčšie než 1. Potom platí nerovnosť

$$2\sum_{i=1}^{r} n_i - 4 \leqq n_1 n_2 \ldots n_r \tag{1}$$

Dôkaz tvrdenia (B). Nech r je pevne zvolené. Dôkaz nerovnosti (1) vykonáme matematickou indukciou vzhľadom na $l = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i$, $l \geqq 2r$. Ak $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i = 2r$, tak pre každé $i = 1, 2, \ldots, r$ platí $n_i = 2$ a nerovnosť (1) nadobúda tvar $4r - 4 \leqq 2^r$. Táto nerovnosť je na základe tvrdenia (A) splnená. Nech nerovnosť (1) platí pre $l - 1 \geqq 2r$. Potom $l > 2r$ a niektoré z čísel $n_i > 2$ ($i = 1, \ldots, r$). Môžeme bez újmy na všeobecnosti predpokladať $n_r > 2$. Pre $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i - 1 = l - 1$ na základe indukčného predpokladu platí $2(\sum\limits_{i=1}^{r} n_i - 1) - 4 \leqq n_1 \ldots n_{r-1}(n_r - 1)$, odkiaľ vzhľadom na platnosť nerovnosti $2 \leqq n_1 \ldots n_{r-1}$ vyplýva nerovnosť (1).

(C) Nech a je prirodzené číslo, ktoré má aspoň dvoch rôznych prvočíselných deliteľov. Potom existuje prvočíslo q také, že

$$S(a) \leqq q < a \tag{2}$$

Dôkaz tvrdenia (C). Na dôkaz použijeme nasledujúcu Čebyševovu vetu (pozri [3], str. 137): Ak N je prirodzené číslo >3, potom medzi N a $2N - 2$ leží aspoň jedno prvočíslo. Nech $q_1^{\alpha_1} \ldots q_r^{\alpha_r}$ je kanonický rozklad čísla a. Pretože podľa predpokladu $r \geqq 2$ je zrejme $S(a) - 1 > 3$. Na základe Čebyševovej vety (ak položíme $N = S(a) - 1$) existuje prvočíslo q tak, že $S(a) - 1 < q < 2(S(a) - 1) - 2 = 2S(a) - 4$. Z posledného vzťahu ihneď vyplýva ľavá časť nerovnosti (2). Na dôkaz pravej časti nerovnosti (2) stačí dokázať nerovnosť $2\sum\limits_{i=1}^{r} q_i - 4 \leqq q_1 \ldots q_r$ (pretože $S(a) = \sum\limits_{i=1}^{r} q_i$ a $q_1 \ldots q_r \leqq q_1^{\alpha_1} \ldots q_r^{\alpha_r} = a$). Platnosť tejto nerovnosti však vyplýva z tvrdenia (B).

Pristúpme teraz k dôkazu nerovnosti $S(a) \leqq n$ pre každé a, $1 \leqq a \leqq \leqq p_{m+1} - 1$. Ak $a = 1$, tak $S(a) = 0 < n$. Ak a má len jedného prvočíselného deliteľa p, tak $S(a) = p \leqq p_m \leqq n$. Ak a má aspoň dvoch rôznych prvočíselných deliteľov, tak platnosť nerovnosti $S(a) \leqq n$ nahliadneme nepriamo. Nech $n < S(a)$. Potom vzhľadom na tvrdenie (C) existuje prvočíslo q také, že platia nerovnosti $n < S(a) \leqq q < a$. Pretože $n < q$ platí $a < p_{m+1} \leqq q$, čo je spor.

V ďalšom ukážeme, že postupnosť $\{1, 2, \ldots, p_{m+1} - 1\}$ je jediná $(p_{m+1} - 1)$-členná postupnosť po sebe idúcich prirodzených čísel s vlastnosťou, že pre každý jej člen a platí $S(a) \leqq n$. Na tento účel použijeme nasledujúce tvrdenie známe z teórie čísel (pozri [3], str. 138): Ak $N > K$, potom v postupnosti prirodzených čísel $N, N + 1, N + 2, \ldots, N + K - 1$ existuje aspoň jedno číslo, ktoré má prvočíselného deliteľa $>K$. Z úvah týkajúcich sa postupnosti $\{jp_{m+1}\}_{j=1}^{\infty}$ je zrejmé, že každá $(p_{m+1} - 1)$-členná postupnosť s požadovanou vlastnosťou má nutne tvar

$$bp_{m+1} + 1, \quad bp_{m+1} + 2, \ldots, (b + 1)\, p_{m+1} - 1 \tag{3}$$

kde b je celé nezáporné číslo. Stačí nahliadnuť, že keď $b > 0$, potom pre niektorý člen a postupnosti (3) platí $S(a) > n$. Položme $N = bp_{m+1} + 1$ a $K = p_{m+1} - 1$. Podmienka $N > K$ uvedeného tvrdenia za predpokladu $b > 0$ je splnená; z tvrdenia vyplýva existencia člena a postupnosti (3) s prvočíselným deliteľom p, $p > K = p_{m+1} - 1$, odkiaľ $p \geqq p_{m+1}$, a teda $S(a) > n$.

Tým je dôkaz vety skončený.

Poznámka. V súvislosti s dokázanou vetou sa naskytá tento problém: Nech pre každé prirodzené a číslo $\sigma(a)$ určuje súčet všetkých kladných deliteľov a. Nech n je prirodzené číslo a $R(n)$ najväčšie číslo s vlastnosťou: Existuje $R(n)$-členná postupnosť po sebe idúcich prirodzených čísel, pričom pre každý člen a tejto postupnosti platí $\sigma(a) \leqq n$. Určte $R(n)$, prípadne aj všetky $R(n)$-členné postupnosti s požadovanou vlastnosťou.

Literatúra

[1] Kostyrko, P.: O postupnostiach prirodzených čísel s ohraničeným počtom prvočíselných deliteľov. Časopis pro pěst. mat. 97 (1972), 332—333.
[2] Kostyrko, P.: O postupnostiach prirodzených čísiel s ohraničenou veľkosťou prvočíselných deliteľov. Matematické obzory 1 (1972), 71—72.
[3] Sierpiński, W.: Elementary theory of numbers. Warszawa 1964.