LIMITNÉ TEORÉMY V TEÓRII PRAVDEPODOBNOSTI — SLABÝ ZÁKON VEĽKÝCH ČÍSEL

MILOSLAV DUCHOŇ, Bratislava

Veľká časť teórie pravdepodobnosti sa zaoberá štúdiom limitných teorém. Tieto limitné teorémy sa delia na dve skupiny: slabé a silné limitné teorémy. Na ilustráciu týchto teorém použijeme štúdium niektorých otázok vznikajúcich pri hádzaní mince a diskusiu najznámejšieho prototypu slabých limitných teorém.

I. Prípad n nezávislých hodov bezchybnej mince

Práve uvedené slová nás privádzajú do určitých ťažkostí. Vzniká totiž hneď otázka, aký význam sa má pripísať slovám bezchybná minca a nezávislosť hodov. Skúsenosť nabáda prijať nasledovné stanovisko. Všetky úvahy týkajúce sa n hodov bezchybnej mince sa budú zakladať na dvoch predpokladoch:

a) Celkove je 2^n možných výsledkov, a to sú všetky n-členné postupnosti dvoch písmen Z a C (znaku a čísla).

b) Každá postupnosť má pravdepodobnosť 2^{-n}.

Viac sa nepredpokladá. Výpočty zamerané na odhadnutie možnosti určitého výsledku pri hádzaní bezchybnej mince vychádzajú z predpokladov a) a b). Preto prijímame tieto predpoklady ako definíciu n nezávislých hodov bezchybnej mince.

1. Zákon priemerných hodnôt

Vo svojom podvedomí temer každý človek verí, že pri veľkom počte hodov je počet znakov približne rovnaký ako počet čísel. Teda, ak hádžeme mincu veľký počet krát, tak približne v polovici hodov sa dostane znak.

Ako toto matematizovať? Všetko, čo máme k dispozícii na matematizáciu tohto zákona priemerných hodnôt, sú hore uvedené predpoklady a) a b). Teda, ak existuje niečo, čo zodpovedá zákonu priemerných hodnôt, musí to vychádzať len z predpokladov a) a b).

Analyzujme tých 2^n postupností písmen Z a C. V koľkých z týchto postupností sa vyskytne presne k znakov? Toto je kombinatorický problém, ktorý možno zrejme preformulovať takto: Ak je daných n štvorčekov,

koľkými rôznymi spôsobmi môžeme rozmiestniť v nich k krížikov? Napríklad ak $n = 3$, $k = 2$, tak výsledok je 3. Keď chceme dostať odpoveď vo všeobecnosti, tak tých k krížikov označíme indexami, aby sme ich odlíšili, to jest dostaneme $+_1, +_2, \ldots, +_k$. Teraz môžeme takých k krížikov rozmiestniť do n štvorčekov $n(n-1) \ldots (n-k+1)$ spôsobmi ($+_1$ možno umiestniť n spôsobmi, potom $+_2$ $n-1$ spôsobmi a tak ďalej). Ale každá permutácia k indexovaných krížikov medzi miestami, ktoré zaujímajú, dáva presne to isté rozmiestnenie neindexovaných krížikov. Tých permutácií je $k!$. Preto máme výsledok, ktorý uvedieme v nasledovnej forme.

Tvrdenie 1. Existuje presne

$$C_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

postupností písmen Z a C dĺžky n, v ktorých sa objaví k-krát znak.

Jednoduché výpočty ukazujú, že ak je n párne, tak $C_k(n)$ nadobúda maximum pre $k = n/2$ a ak je n nepárne, tak $C_k(n)$ má maximum pre $k = (n-1)/2$ a $k = (n+1)/2$.

Je známe, že pri výpočte $n!$ pre veľké n sa používa Stirlingova aproximácia (pozri [1], str. 606), podľa ktorej

$$n! \cong e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} \tag{1}$$

pre $n \to \infty$.

Keď použijeme vzťah (1), dostaneme

$$C_n(2n) = \frac{(2n)!}{n!n!} \cong \frac{e^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{e^{-2n}n^{2n}(2\pi n)} = 2^{2n}\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \tag{2}$$

pre $n \to \infty$.

Pri $2n$ hodoch je celkom 2^{2n} možných postupností písmen Z a C. Teda z (2) vyplýva, že $k = n$ len pre zlomok postupností, veľkosti približne $1/\sqrt{\pi n}$, z celkového počtu 2^{2n} postupností. Ekvivalentne možno povedať, že pravdepodobnosť, že počet znakov sa bude rovnať počtu čísel, je približne $1/\sqrt{\pi n}$ pre veľké n.

Záver. Keď n nadobúda veľké hodnoty, tak pomer počtu tých postupností (k celkovému počtu), v ktorých sa vyskytne znak presne $n/2$-krát, sa blíži k nule.

Nech už zákon priemerných hodnôt hovorí čokoľvek, určite nie je opodstatnené očakávať, že pri tisícke hodov bezchybnej mince padne presne 500-krát znak. Ani nie je možné udať pevne nejaké číslo M tak, že pre veľké n bude mať väčšina postupností vlastnosť, že počet znakov v postupnosti bude v rozpätí od $n/2 - M$ po $n/2 + M$. Pre $2n$ hodov, ako možno ľahko zistiť, je tento zlomok postupností menší ako $2M/\sqrt{\pi n}$ (približne), a teda sa stále zmenšuje.

Odôvodnenejšie, ba možno najlepšie, čo možno očakávať, je to, že obvykle pomer počtu znakov (k celkovému počtu hodov) je pri n hodoch blízky číslu 1/2. Presnejšie sa môžeme pýtať: Keď je dané číslo $\varepsilon > 0$, pri koľkých postupnostiach sa pomer počtu znakov líši od 1/2 o menej než ε? Odpoveď na túto otázku je jednou z prvých a najznámejších limitných teorém v teórii pravdepodobnosti. Nech $N(n, \varepsilon)$ je počet postupností dĺžky n, ktoré vyhovujú podmienke v otázke, to jest v ktorých sa pomer počtu znakov (k celkovému počtu hodov) líši od 1/2 o menej než ε.

Teoréma 2. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n, \varepsilon)}{2^n} = 1.$$

Inými slovami, zlomok tých postupností, v ktorých sa pomer počtu znakov k n líši od 1/2 o menej než $\varepsilon > 0$, sa blíži k jednotke, keď n vzrastá, a to pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$.

Táto teoréma sa nazýva slabým zákonom veľkých čísel pre hádzanie bezchybnej mince. Túto teorému by sme mohli dokázať tak, že by sme ukázali, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2^n} \sum_{k;\,|k/n - 1/2| < \varepsilon} C_k(n)\right] = 1. \tag{3}$$

Teoréma 2 hovorí, že vo väčšine prípadov, ak hádžeme mincu n-krát (n dosť veľké), tak pomer počtu znakov (k celkovému počtu hodov) bude blízky 1/2.

Toto je vlastne už sčasti to, čo sa intuitívne rozumie pod zákonom priemerných hodnôt, ktorý nás naviac vedie k presvedčeniu, že nezáleží na tom, ako sme si zle počínali pri prvých n hodoch, pretože nakoniec sa veci ustália a urovnajú, ak vydržíme pri hádzaní mince.

V ďalšom bude dokázaná teoréma 2. Dôkaz by bolo možné urobiť tiež tak, že by sa odvodil vzťah (3) priamym výpočtom, ako to bolo urobené pôvodne. Dnes sa to však dokazuje jednoduchším spôsobom, ktorý sa hodí aj pre všeobecnejšie situácie. Prv než tak urobíme, zavedieme niektoré pojmy a dokážeme niektoré pomocné tvrdenia.

2. Náhodná udalosť, náhodná premenná, stredná hodnota

Definícia

a) Nech Ω_n je množina pozostávajúca zo všetkých postupností písmen Z a C dĺžky n. Označme tieto postupnosti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$, $N = 2^n$. Množinu Ω_n nazývame priestorom elementárnych udalostí ω.

b) Nech A, B, C a tak ďalej označujú podmnožiny priestoru Ω_n. Nazývame ich náhodnými udalosťami, krátko udalosťami. Pravdepodobnosť ľubo-

voľnej podmnožiny A sa definuje ako súčet pravdepodobností všetkých postupností, ktoré sú v A, to jest

$$P(A) = 2^{-n} \cdot k,$$

kde k je počet postupností v A alebo ekvivalentne: $P(A)$ je zlomok tých postupností (z celkového počtu), ktoré sú v A.

c) Nech X je ľubovoľná reálna funkcia definovaná na Ω_n. Nazývame ju náhodnou premennou na Ω_n. Stredná hodnota funkcie (náhodnej premennej) X je definovaná vzťahom

$$EX = \sum_{\omega \varepsilon \Omega_n} X(\omega) \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Jednou zaujímavou podmnožinou toho priestoru Ω_n je množina A všetkých takých postupností, kde prvým členom je Z. Túto množinu možno popísať takto: Výsledkom prvého hodu je znak. Za predpokladu b) musíme mať $P(A) = 1/2$. Je to preto, lebo je presne 2^{n-1} prvkov množiny Ω_n, ktorých prvým členom je Z.

Všimnime si, že stredná hodnota funkcie X je vlastne priemer jej hodnôt vážených pravdepodobnosťou. Ak X nadobúda hodnotu x_1 na množine postupností A_1, x_2 na A_2, ..., x_k na A_k, pričom tie A_i sú disjunktné, tak môžeme písať

$$EX = \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i).$$

Operácia strednej hodnoty má vlastnosť linearity:

$$E(aX + bY) = aEX + bEY,$$

kde a a b sú reálne čísla. Okrem toho platí:

$$EX \geqq 0 \text{ pre } X \geqq 0.$$

V ďalšom budeme označovať symbolom $\{\omega: \ldots\}$ množinu tých prvkov ω z Ω_n, ktoré splňujú podmienky uvedené za dvojbodkou.

3. Čebyševova nerovnosť

Dôkaz teorémy 2 sa zakladá na dôležitej Čebyševovej nerovnosti, ktorú teraz dokážeme.

Tvrdenie 3. Pre ľubovoľnú funkciu X na Ω_n a ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$ platí

$$P(\omega : |X(\omega)| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} E(X^2).$$

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva zo vzťahov

$$P(\omega : |X(\omega)| \leqq \varepsilon) = \frac{1}{2^n} (\text{počet } \omega : |X(\omega)| \geqq \varepsilon) =$$

$$= \sum_{\omega : |X(\omega)| \geqq \varepsilon} \frac{1}{2^n} \leqq \sum_{\omega : |X(\omega)| \geqq \varepsilon} \frac{X^2(\omega)}{\varepsilon^2} \frac{1}{2^n} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{\omega \varepsilon \Omega_n} X^2(\omega) \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\varepsilon^2} E(X^2).$$

Definujeme pomocné náhodné premenné $X_1, \ldots, X_n$, S_n na Ω_n vzťahmi

$$X_j(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ ak } j\text{-ty člen v postupnosti } \omega \text{ je } Z, \\ 0 \text{ ak } j\text{-ty člen v postupnosti } \omega \text{ je } C, \end{cases}$$

$$S_n(\omega) = X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega),$$

takže $S_n(\omega)$ udáva počet znakov postupnosti ω.

Počítajme

$EX_1 = 0$. $P(\omega : \text{prvý hod je } C) + 1 . P(\omega : \text{prvý hod je } Z) = 1/2$. $EX_1X_2 = 0$. $P(\omega : \text{prvý alebo druhý hod je } C) + 1. P(\omega : \text{prvý a druhý hod je } Z) = \frac{1}{4}$

(pretože je 2^{n-2} postupností začínajúcich s ZZ). Podobne sa vypočíta, že ak $i \neq j$, tak

$$\left(X_i - \frac{1}{2}\right)\left(X_j - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ pre } 2^{n-1} \text{ postupností}, \\ -\frac{1}{4} \text{ pre } 2^{n-1} \text{ postupností}, \end{cases}$$

takže

$$E\left(X_i - \frac{1}{2}\right)\left(X_j - \frac{1}{2}\right) = 0, \; i \neq j.$$

Ďalej platí

$$\left(X_i - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

pre všetky postupnosti, a preto

$$E\left(X_i - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Nakoniec vezmime

$$S_n - \frac{n}{2} = \sum_{j=1}^{n} \left(X_j - \frac{1}{2}\right),$$

takže

$$E\left(\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{n^2}E\left[\sum_{i,j}\left(X_i-\frac{1}{2}\right)\left(X_j-\frac{1}{2}\right)\right]= \tag{4}$$

$$=\frac{1}{n}E\left(X_1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4n}.$$

Pomocou zavedených označení nadobudne teoréma 2 nasledovný tvar:

Teoréma 2'. Platí

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right)=1.$$

Dôkaz. Podľa Čebyševovej nerovnosti máme

$$P\left(\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n}-\frac{1}{2}\right| \geqq \varepsilon\right)\leqq\frac{E\left(S_n/n-\frac{1}{2}\right)^2}{\varepsilon^2}.$$

Ak použijeme vzťah (4), dostaneme

$$P\left(\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n}-\frac{1}{2}\right| \geqq \varepsilon\right)\leqq\frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

z čoho

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n}-\frac{1}{2}\right| \geqq \varepsilon\right)=0.$$

Keďže $P(\Omega_n)=1$, tak dôkaz je hotový.

II. Zovšeobecnenie na prípad ľubovoľnej mince

Teraz uvedieme, aký tvar nadobudnú predchádzajúce výsledky, ak nepredpokladáme, že minca je bezchybná, ale môže to byť nejaká nepravidelná minca.

Uvažujeme n nezávislých hodov nepravidelnej mince a nech p je číslo s vlastnosťou $0 \leqq p \leqq 1$.

To znamená:

a) Celkom je 2^n možných výsledkov pozostávajúcich zo všetkých postupností ω v Ω_n.

b) Pravdepodobnosť $P(\omega)$ ľubovoľnej postupnosti ω je daná vzťahom

$$P(\omega)=p^{k(\omega)}\,q^{n-k(\omega)}\,,\ q=1-p$$

kde $k(\omega)$ je počet znakov v postupnosti ω.

Tak ako predtým, definujeme

$$P(A) = \sum_{\omega \varepsilon A} P(\omega),$$

pre $A \subset \Omega_n$. Pre ľubovoľnú reálnu funkciu (náhodnú premennú) X, definovanú na Ω_n definujeme jej strednú hodnotu vzťahom

$$EX = \sum_{\omega \varepsilon \Omega_n} X(\omega) P(\omega).$$

V prípade hádzania nepravidelnej mince platia vzťahy, ktoré sa dokazujú podobne ako v prípade bezchybnej mince.

1. $P(\Omega_n) = 1$.
2. $P(A \cup B) \leqq P(A) + P(B)$, $A, B \subset \Omega_n$, s rovnosťou, keď A a B sú disjunktné.
3. Platí $P(\omega : S_n(\omega) = k) = C_k(n) p^k q^{n-k}$.
4. Platí Čebyševova nerovnosť.
5. Platí slabý zákon veľkých čísel v tvare: pre ľubovoľné číslo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\omega : \left| \frac{S_n(\omega)}{n} - p \right| < \varepsilon\right) = 1.$$

6. Číslo p sa nazýva pravdepodobnosťou toho, že padne znak.
7. Možno použiť Stirlingovu aproximáciu, keď chceme dostať aproximáciu pre hodnotu $P(S_{2n} = n)$.

Čitateľovi, ktorý sa zaujíma hlbšie o otázky teórie pravdepodobnosti, odporúčame prácu [2], prípadne [3], [4], [5].

Literatúra

[1] Jarník, V.: Integrální počet II. Praha 1955.
[2] Riečan, B.: O pravdepodobnosti a miere. Bratislava 1972.
[3] Gnedenko, B. V.: Kurs teorii verojatnostej. Moskva 1961.
[4] Breiman, L.: Probability. Massachusetts 1968.
[5] Rényi, A.: Teorie pravděpodobnosti. Praha 1972.