ČAKAŤ, ČI NEČAKAŤ?

PAVOL KLUVÁNEK, Žilina

To je otázka, ktorú si kladie napríklad sprievodca po jaskyni mimo turistickú sezónu (alebo pltník na Dunajci v takom istom období), keď sa rozhoduje, či má začať prehliadku (plavbu) s malým počtom turistov, alebo ešte počkať na prípadných ďalších záujemcov. Rozhoduje sa pritom intuitívne. Sú však situácie, v ktorých takéto rozhodovanie z ekonomických dôvodov nemôže zostať len v „hamletovskej polohe", ale treba stanoviť jednoznačné, rozumné rozhodovacie kritérium.

Automatizácia riadenia môže byť ďalším dôvodom, ktorý si vynucuje algoritmizáciu rozhodovacích procesov, a teda aj rozhodovania naznačeného druhu. Jedno možné riešenie takéhoto problému si ukážeme na prípade, pre ktorý je rovnako dôležité hľadisko ekonomickej efektívnosti i požiadavka automatizácie. Ide o prípad zhromažďovania východzieho nákladného vlaku v zriaďovacej stanici.

V každej zriaďovacej stanici na železničnej sieti vzniká situácia, pri ktorej sú síce vytvorené technické predpoklady pre výpravu vlaku do inej stanice (pohotová vlaková lokomotíva, voľná trasa a pod.), avšak nie je nahromadené maximálne množstvo záťaže povolené pre daný vlak. Staničný dispečer pritom na základe informácií, ktoré dostáva zo susedných staníc, z trate, z manipulačných miest a pod., vie pomerne presne, aké množstvá záťaže a v akom čase môže pre daný vlak očakávať. Stojí preto pred rozhodnutím, či nariadiť výpravu nevyťaženého nákladného vlaku, alebo počkať na prípadný ďalší prírastok záťaže. Prvé rozhodnutie znamená nedostatočne efektívne využitie prostriedkov (trakčnej sily lokomotívy, dopravný personál je v podstate rovnako zamestnaný krátkym vlakom ako dlhým a pod.), na druhej strane rozhodnutie „čakať" má za následok neproduktívny prestoj už nahromadenej záťaže a pohotovej vlakovej lokomotívy.

Podkladom pre optimalizáciu je nákladová funkcia $n(x)$, ktorá znamená ocenenie nákladov na odvoz x-tonového vlaku z východiskovej do cieľovej stanice, ďalej sadzba a vyjadrujúca náklady na hodinový prestoj jednej pohotovej hrubej tony záťaže a sadzba b, ktorá znamená náklady na prestoj vlakovej lokomotívy za hodinu.

O funkci $n(x)$ budeme predpokladať, že je diferencovateľná. Potom platí

$$n(x + \Delta x) = n(x) + n'(x)\,\Delta x + o(\Delta x)^{*)} \tag{1}$$

*) Ako obvykle, píšeme $f(x) = o(g(x))$, ak $\lim\limits_{x\to 0} [g(x)]^{-1} f(x) = 0$.

Nech v okamihu t je pre zvolený východzí nákladný vlak nahromadené v danej stanici $x(t)$ ton záťaže. Nech za prírastok času Δt stúpne nahromadená záťaž o množstvo $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$. Náklady na odvezenie 1 hrubej tony v prípade, že sa rozhodneme nariadiť prípravu na odchod v momente t, sú

$$\frac{n[x(t)]}{x(t)}. \tag{2}$$

V prípade, že sa rozhodneme vyčkať ešte po dobu Δt, treba k nákladom na odvoz ťažšieho vlaku $n[x(t + \Delta t)]$ pripočítať ešte náklady na prestoj záťaže $a \,.\, x(t) \,.\, \Delta t$ a náklady na prestoj lokomotívy $b \,.\, \Delta t$. Takže jednotkové náklady na odvezenie 1 hrubej tony pre takýto variant rozhodnutia sú

$$\frac{n(x(t) + \Delta x) + a \,.\, x(t)\, \Delta t + b\Delta t}{x(t + \Delta t)}. \tag{3}$$

Porovnaním hodnoty (2) a (3) možno jednoznačne určiť, ktore rozhodnutie je výhodnejšie. Vyberie sa to rozhodnutie, pri ktorom sú náklady na odvoz 1 tony nižšie. Medzný prípad nastane, ak sú obidva výrazy (2) a (3) rovnaké.

$$\frac{n(x(t))}{x(t)} = \frac{n(x(t) + \Delta x) + ax(t)\, \Delta t + b\Delta t}{x(t + \Delta t)}. \tag{4}$$

Ukážeme si, že za predpokladu (1) možno určiť funkciu $x(t)$ splňujúcu rovnicu (4) pre ľubovoľnú hodnotu Δt. Táto funkcia umožní konštrukciu príslušného kritéria, lebo má tú vlastnosť, že jej prírastok za ľubovoľný čas predstavuje takú záťaž, pri ktorej sú jednotkové náklady (2) a (3) na odvezenie jednej tony v rovnováhe. Ak teda skutočný prírastok záťaže za daný čas je vyšší než zodpovedajúci prírastok funkcie $x(t)$, potom sa na túto záťaž vyplatí čakať, v opačnom prípade treba voliť odchod nevyťaženého vlaku.

Po dosadení (1) do (4) a po úprave dostaneme

$$[n(x(t)) - n'(x(t))\, x(t)] \,.\, \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \frac{o(\Delta x)}{\Delta t} = ax^2(t) + bx(t)$$

pričom $n'(x)$ znamená deriváciu funkcie $n(x)$ podľa premennej x.

Pre $\Delta t \to 0$ prejde táto rovnica do tvaru

$$[n(x(t)) - n'(x(t))\, x(t)] \,.\, x'(t) = ax^2(t) + bx(t) \tag{5}$$

(predpokladajme, že $x(t)$ je diferencovateľná, z čoho vyplýva $\frac{o(\Delta x)}{\Delta t} =$ $= \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \,.\, \frac{\Delta x}{\Delta t} \to 0$).

Rovnica (5) je diferenciálna rovnica schopná separácie. Funkcia $n(x)$ a jej derivácia $n'(x)$ totiž neobsahuje explicitne premennú t.

V ekonomike železničnej dopravy sa obvykle považuje nákladová funkcia $n(x)$ za lineárnu funkciu množstva záťaže a kladie sa

$$n(x) = k \cdot x + q \tag{6}$$

kde q sú tzv. podmienečne nezávislé náklady od váhy vlaku a predstavujú náklady na výpravu vlaku, lokomotívnu čatu a pod. Závislá zložka kx vyjadruje spotrebu energie, odpisy vozňového parku atď.

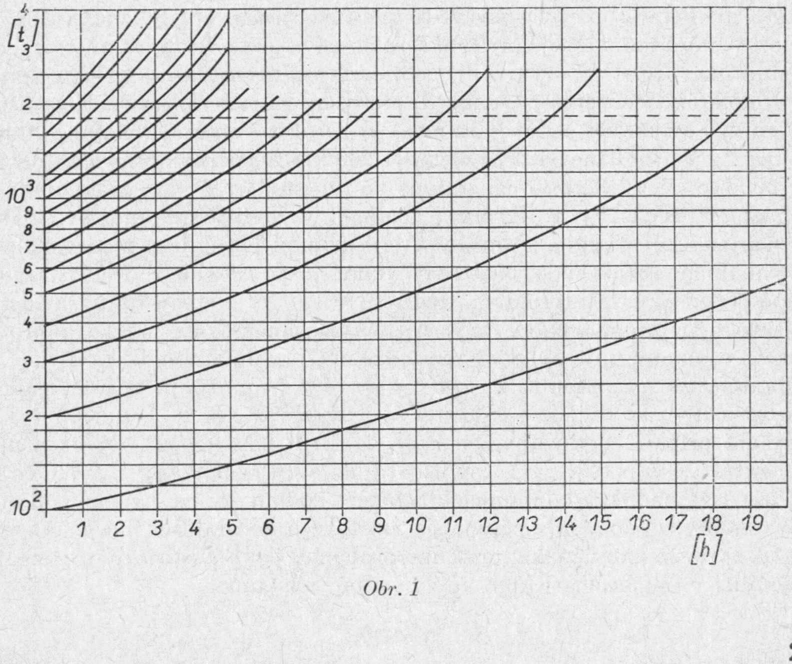
Ak dosadíme do rovnice (5) funkciu $n(x)$ v tvare (6), potom dostaneme rovnicu

$$x'(t) - \beta \cdot x(t) = \alpha \cdot x^2(t) \tag{7}$$

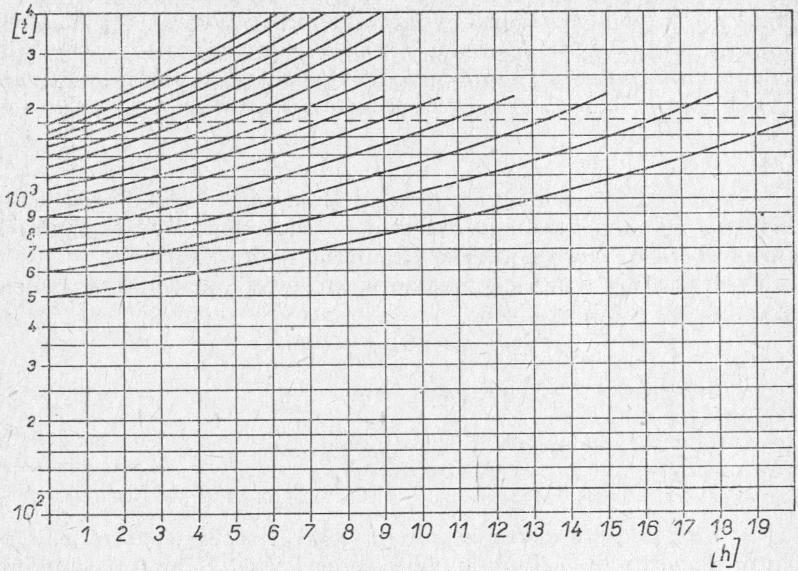
kde sme označili $\beta = b/q$ a $\alpha = a/q$;
jej riešenie je

$$x(t) = \frac{\beta e^{\beta t}}{\gamma - \alpha e^{\beta t}} \tag{8}$$

γ je integračná konštanta, ktorá sa určí na základe situácie, ktorá je na koľajisku v momente, keď prvý raz možno uplatniť rozhodovacie kritérium.



Obr. 1



Obr. 2

Tento moment je pre nás počiatok merania času a $x(0)$ je zodpovedajúce množstvo nahromadenej záťaže v čase 0, t. j. v čase, kedy sa, ako sme spomenuli na začiatku, vytvorili podmienky pre možnú výpravu vlaku.

Grafické znázornenie riešenia (8) pre dve rozličné vlakové relácie líšiace sa len vzdialenosťou cieľovej stanice, sú na *obr. 1* a *obr. 2* (cieľová stanica na *obr. 1* je približne vo vzdialenosti 200 km a na *obr. 2* vo vzdialenosti asi 500 km od východiskovej stanice po tej istej trati). Čas je na obidvoch obrázkoch vynášaný v lineárnej stupnici v hodinách, množstvo záťaže v logaritmickej stupnici v tonách. Prerušovanou čiarou je vyznačená norma maximálneho zaťaženia východzieho vlaku, preto riešenie za touto hranicou nemá praktickú interpretáciu. Jednotlivé krivky zodpovedajú rozličným počiatočným podmienkam, teda rozličným množstvám záťaže nahromadeným v okamihu, kedy prvý raz môže dôjsť k uplatneniu kritéria.

Je dôležité si uvedomiť, že grafy z *obr. 1 a 2* umožňujú aj pracovníkovi bez špeciálnej kvalifikácie exaktne sa rozhodovať. K rozhodnutiu v konkrétnom prípade stačí, aby do grafu zaniesol bod (t_0, x_0), reprezentujúci súčasný stav a bod (t_1, x_1), reprezentujúci stav očakávaný a zistil, či bod (t_1, x_1) leží nad krivkou prechádzajúcou bodom (t_0, x_0), alebo pod ňou.

Výsledky riešenia sa v súčasnosti zavádzajú do praktického používania. Slúžia zároveň ako ukážka, pred aké problémy býva postavený matematik, pracujúci v nematematickom aplikovanom výskume.