ZÁKLADY TEÓRIE FUNKCIÍ I

JAROSLAV SMÍTAL

Účelom tohto článku je uviesť niektoré námety pre fakultatívne vyučovanie matematiky vo štvrtom ročníku gymnázií. Látku som sa snažil vybrať tak, aby nadväzovala na gymnaziálne učivo. Teoretická časť nie je rozsiahla, dôraz sa kladie na príklady. A to pokiaľ možno na príklady z bežného života. Pravdepodobne nebude vždy možné prebrať celú tu uvedenú látku. V tom prípade netreba vynechať riešenie funkcionálnych rovníc (1), (4) a (10), ktoré majú veľa praktických aplikácií a okrem iného objasňujú dôležité postavenie funkcií e^x, $\ln x$. Na konci každého odseku sú uvedené cvičenia. Odporúčam, aby sa prepočítali vždy skôr (aspoň niektoré), ako sa začne preberať ďalší odsek. Pre kontrolu sú na konci článku uvedené výsledky cvičení, v niektorých prípadoch aj so stručným návodom. Ťažšie cvičenia sú označené hviezdičkou.

1. Úvod

Začnime príkladom. Skupina n rybárov sedí okolo rybníka. Ryby chytá každý na svoju udicu. Predpokladajme, že každému stačí, ak uloví jednu rybku. Ak sa to niektorému podarí, „zbalí sa" a odíde. No bez úlovku neodíde žiadny. Je jasné, že ak sú v rybníku ryby, bude počet rybárov, sediacich pri ňom, s postupom času klesať. Nás bude zaujímať, akým spôsobom, akou funkciou času bude ich počet.

Táto úloha vyzerá na prvý pohľad odstrašujúco. Ale hneď sa ukáže, že nie je veľmi ťažká. Najprv zavedieme označenia, problém potom bude jasnejší. Čas začneme merať od okamihu, v ktorom rybári začali loviť. Znakom $f(t)$ označíme pomer medzi počtom rybárov, ktorí v čase t ešte lovia, k celkovému počtu rybárov n. Potom počet rybárov, ktorí v čase t ešte nič nechytili, bude $n \,.\, f(t)$. Treba nájsť funkciu f.

Čo zatiaľ vieme o funkcii f? Rýb je dosť a predpokladajme, že rybári sa pri chytaní navzájom neovplyvňujú. Ďalej dĺžka čakania nemá vplyv na možnosť chytiť v najbližšom okamihu rybu: Rybár, ktorý čaká na úlovok bezúspešne niekoľko hodín, má takú istú šancu v najbližšom okamihu niečo uloviť, ako rybár, ktorý práve prišiel. Stručne teda možno povedať, že

(a) funkcia f nezávisí od n,

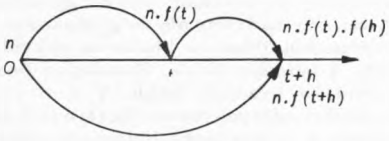
(b) priebeh funkcie f nezávisí od toho, ktorý časový okamih zvolíme za počiatočný.

Takže počet rybárov, ktorí v čase $t + h$ ešte sedia pri rybníku, možno vyjadriť dvoma spôsobmi: Buď ako $n \,.\, f(t + h)$, alebo ako $(n \,.\, f(t)) \,.\, f(h)$.

Môžeme to znázorniť aj graficky tak ako na *obr. 1.* Takto dostávame rovnicu $n \,.\, f(t + h) = (n \,.\, f(t)) \,.\, f(h)$, alebo

$$f(t + h) = f(t) \,.\, f(h). \tag{1}$$

Problém s chytaním rýb vedie k rovnici (1). Neznámou je v nej funkcia f. Taká rovnica sa nazýva funkcionálna rovnica.



Obr. 1.

Predpoklady bolo možné sformulovať aj inak. Namiesto predpokladov (a) a (b) stačilo uviesť, že

(c) v rovnako dlhých časových intervaloch je pomer počtu rybárov na začiatku intervalu k počtu rybárov na konci intervalu rovnaký.

Ak sú teda $\langle 0, h\rangle$ a $\langle t, t + h\rangle$ dva časové intervaly s rovnakou dĺžkou h, bude platiť

$$\frac{n}{n \,.\, f(h)} = \frac{n \,.\, f(t)}{n \,.\, f(t + h)} \tag{2}$$

(znázornite si to graficky!). Na ľavej strane tohto vzťahu je totiž pomer medzi počtom rybárov v čase 0 k ich počtu v čase h, na pravej strane zasa pomer počtu rybárov v čase t k ich počtu v čase $t + h$. Úpravou vzťahu (2) dostaneme zase rovnicu (1).

Úlohu o rybároch rozriešime, ak nájdeme funkciu f, ktorá vyhovuje rovnici (1). Preto sa v ďalšej časti článku budeme zaoberať metódami riešení takýchto rovníc. Potom uvedieme ďalšie podobné príklady.

2. Funkcionálne rovnice

Dôležitým pojmom, ktorý sa bude v tomto článku často vyskytovať, je pojem funkcie. Pripomeňme si preto jeho definíciu. Funkciou sa nazýva každá relácia f na množine R všetkých reálnych čísel, ktorá má tú vlastnosť, že pre každé $x \in R$ existuje najviac jedno také $y \in R$, že usporiadaná dvojica $[x, y]$ je prvkom f, t. j. $[x, y] \in f$. Namiesto $[x, y] \in f$ budeme často písať $y = f(x)$. Definičný obor funkcie f je množina D všetkých tých $x \in R$, ku ktorým existuje také $y \in R$ tak, že platí $f(x) = y$. Namiesto *D je definičný obor funkcie f* budeme hovoriť tiež *f je definovaná na D*. Budeme používať aj obrat *y je hodnota funkcie v čísle x alebo v bode x.*

Nebudeme tu presne definovať, čo je funkcionálna rovnica. Namiesto toho uvedieme niekoľko ďalších príkladov funkcionálnych rovníc, ktoré umožnia urobiť si o význame tohto pojmu presnejšiu predstavu:

$$f(xy) = x \,.\, f(y) \tag{3}$$

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{4}$$

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \,.\, f(y) \tag{5}$$

$$f(xy) = f(x/y) \tag{6}$$

$$f'(x) = x^3 \tag{7}$$

$$f'(x) = f(x) + 4x^2 \tag{8}$$

(f' znamená deriváciu funkcie f). V každej z uvedených rovníc je neznámou funkcia f. Rovnice (7), (8) sa od predchádzajúcich líšia tým, že sa v nich, prípadne spolu s funkciou f, nachádza aj derivácia f' neznámej funkcie. Takéto rovnice sa nazývajú diferenciálne rovnice. V tomto článku sa však nimi nebudeme zaoberať, aj keď čitateľ iste ľahko zistí, že každá funkcia f, definovaná na množine R všetkých reálnych čísel, ktorá je riešením rovnice (7), má tvar $f(x) = \frac{1}{4} x^4 + c$, kde c je ľubovoľná konštanta.

Riešiť funkcionálnu rovnicu znamená nájsť všetky funkcie, pre ktoré platí príslušný vzťah. Niekedy sa v úlohe uvádza aj definičný obor hľadaných funkcií. Od toho potom závisí riešenie rovnice.

Príklad 1. Nájsť všetky funkcie f, definované na množine R všetkých reálnych čísel, ktoré vyhovujú funkcionálnej rovnici (4).*)

Ako budeme pri riešení postupovať? Celkom prirodzeným spôsobom. Najskôr budeme predpokladať, že rovnica má nejaké riešenie f a z tohto predpokladu odvodíme (ak sa to dá), aký tvar musí mať to riešenie. Inak povedané, nájdeme nutné podmienky pre to, aby f bolo riešením rovnice. Potom sa však musíme presvedčiť, či funkcia, ktorú takto dostaneme, je skutočne riešením (pozri v tejto súvislosti *príklad 4*).

Predpokladajme teda, že f je riešením rovnice (4). Pretože oborom definície funkcie f je celá množina R, vzťah (4) platí pre každé dve reálne čísla x, y; špeciálne aj pre $x = 0$ a pre ľubovoľné y. Takže

$$f(0) = f(0) + f(y)$$

*) Úplný zápis funkcionálnej rovnice (4) pri definičnom obore R je vlastne toto: $\forall xy\,[f(xy) = f(x) + f(y)]$; takýto komplikovaný zápis nebudeme v ďalšom používať, treba však, aby čitateľ v tomto zmysle interpretoval všetky funkcionálne rovnice.

Ak od obidvoch strán odčítame číslo $f(0)$, dostaneme $f(y) = 0$. Toto musí platiť pre každé reálne y. Teda ak nejaká funkcia, definovaná na celej množine R, je riešením rovnice (4), tak sa táto funkcia rovná 0 pre každé $x \in R$. A ľahko sa presvedčíme, že táto funkcia je skutočne riešením rovnice (4). Dokázali sme teda, že funkcia $f(x) = 0$ pre každé $x \in R$ je jediná funkcia definovaná na R, ktorá je riešením (4).

Zostaňme i naďalej pri rovnici (4), ale teraz hľadajme riešenia, ktorých obor definície bude množina všetkých reálnych čísiel rôznych od nuly, teda $R - \{0\}$. Ľahko sa presvedčíme o tom, že v tomto prípade má rovnica aspoň dve riešenia. Okrem funkcie $g(x) = 0$ pre všetky $x \in R - \{0\}$ je riešením aj funkcia h definovaná na $R - \{0\}$ vzťahom $h(x) = \log |x|$.

Vidíme teda, že určenie definičného oboru riešení funkcionálnej rovnice je veľmi dôležité. Preto bude účelné dohodnúť sa na takejto terminológii: V prípade, že hľadáme riešenia nejakej funkcionálnej rovnice definované na nejakej množine D, budeme hovoriť, že hľadáme riešenia tej rovnice na množine D alebo v obore D.

Pripomeňme ešte, že rovnosť dvoch funkcií je definovaná ako rovnosť dvoch množín. To znamená, že dve funkcie sa sebe rovnajú, ak majú ten istý definičný obor a tú istú hodnotu v každom bode ich (spoločného) definičného oboru. Z tohto hľadiska funkcie f a g, ktoré sú riešeniami rovnice (4), sú rôzne funkcie, aj keď sa obidve identicky rovnajú 0.

Na *príklade 1* sme videli, že množina všetkých riešení rovnice (4) v „menšom" obore $R - \{0\}$ má viac prvkov ako množina všetkých riešení vo „väčšom" obore R. Pre ľubovoľnú funkcionálnu rovnicu platí: Ak D_1 a D_2 sú nejaké množiny reálnych čísel a $D_1 \subset D_2$, tak množina všetkých riešení nejakej funkcionálnej rovnice v obore D_2 nie je „bohatšia" ako množina všetkých riešení tej istej rovnice v obore D_1 (zdôvodnite to!).

Riešenie niektorých funkcionálnych rovníc je jednoduché, sú však rovnice, ktorých riešenie je veľmi ťažkou úlohou. Nemožno sa domnievať, že sa nám podarí jednoducho rozriešiť každú funkcionálnu rovnicu, ktorú si zostavíme. Príkladom takejto ťažšie riešiteľnej rovnice je rovnica (5). Jedným z jej riešení je funkcia cos. Všetky riešenia tejto rovnice však hľadať nebudeme.

V ďalších dvoch príkladoch sa riešia rovnice (3) a (6).

Príklad 2. Nájsť všetky riešenia funkcionálnej rovnice (3) v obore R všetkých reálnych čísel.

Riešenie: Predpokladajme, že f_0 je riešením rovnice (3) definovaným na R. Ak položíme $y = 1$, máme $f_0(x) = x \cdot f_0(1)$ pre každé $x \in R$. Teda nutnou podmienkou na to, aby f_0 bolo riešenie rovnice (3) je, aby f_0 bola funkcia ax, kde a je nejaká reálna konštanta.

Musíme sa ešte presvedčiť, či uvedená nutná podmienka stačí aj na to,

aby f_0 bolo riešením, t. j. či každá funkcia ax je riešením (3). Dosadením dostaneme $f_0(xy) = a(xy)$, $xf_0(y) = x(ay)$, teda $f_0(xy) = x \,.\, f_0(y)$. Riešením rovnice (3) sú teda všetky lineárne funkcie, ktorých graf prechádza počiatkom a funkcia, ktorá sa identicky rovná nule.

Príklad 3. Nájsť všetky riešenia funkcionálnej rovnice (6) na množine R^+ všetkých kladných reálnych čísel.

Riešenie: Nech f je riešením rovnice (6). Potom rovnica (6) platí aj v prípade $x = y$. Dosadením dostávame $f(x^2) = f(x/x) = f(1)$, takže hodnota funkcie f sa rovná číslu $f(1)$ v každom takom čísle y definičného oboru R^+ funkcie f, ktorá je štvorcom nejakého kladného reálneho čísla. Ale túto vlastnosť má každé reálne číslo $y \in R^+$. Teda ak nejaká funkcia je v R^+ riešením (6), tak je to konštantná funkcia. Že platí aj obrátené tvrdenie, je zrejmé.

Z týchto troch príkladov si už možno urobiť akúsi predstavu o tom, ako riešime funkcionálne rovnice. Snažíme sa za x a y voliť špeciálne čísla, napr. 0, 1, —1, prípadne volíme $x = y$ alebo $x = -y$ a pod. Samozrejme, ťažko tu podať nejaký všeobecne platný návod. Postup vždy závisí od danej funkcionálnej rovnice.

Príklad 4. Nájdite všetky funkcie definované na množine R všetkých reálnych čísel, ktoré sú riešeniami funkcionálnej rovnice

$$2f(u + v) = f(u + 2v) + u^3 \tag{9}$$

Riešenie: Predpokladajme, že f_0 je riešením rovnice (9). Dosaďme do vzťahu (9) $f = f_0$ a $v = 0$. Potom platí $2f_0(u) = f_0(u) + u^3$, t. j. $f_0(u) = u^3$. Teda ak nejaká funkcia definovaná na R je riešením rovnice (9), tak je to funkcia $f_0(u) = u^3$, pre všetky $u \in R$.

Presvedčíme sa teraz, či f_0 je skutočne riešením rovnice (9). Úpravou ľavej strany dostaneme $2f_0(u + v) = 2(u + v)^3 = L(u, v)$, úpravou pravej strany $f_0(u + 2v) + u^3 = (u + 2v)^3 + u^3 = P(u, v)$. Funkcia f_0 bude riešením (9) práve vtedy, keď pre každé $u, v \in R$ bude $L(u, v) = P(u, v)$. Ale ľahko sa presvedčíme o tom, že táto rovnosť neplatí vždy. Stačí položiť $u = 0$ a dostaneme $L(0, v) = 2v^3 \neq 8v^3 = P(0, v)$ pre každé $v \neq 0$. Teda rovnica (9) nemá v obore R riešenie.

Príkladov podobných *príkladom 2, 3, 4* možno nájsť veľa. Niektoré sú tu uvedené ako cvičenia. Čitateľovi odporúčam, aby skôr, ako pristúpi k ďalšej časti článku, prepočítal aspoň niektoré z nich.

Cvičenia

1. V obore R všetkých reálnych čísiel riešte tieto funkcionálne rovnice:

(a) $f(xy) = f(x)$, (b) $f(x + y) = f(x)$, (c) $f(x + y) = f(x) \,.\, e^y$.

2. Nájdite všetky riešenia funkcionálnych rovníc, definované na množine R^+ všetkých kladných reálnych čísel:

(a) $f(xy) = f(x) \,.\, y^\alpha$, pre všetky $x, y \in R^+$, α je reálna konštanta,
(b) $f(x^y) = f(x) \,.\, y$, pre všetky $x \in R^+$, $y \in R$,
*(c) $f(x^y) = f(x)$, pre všetky $x, y \in R^+$.

3. Nájdite všetky riešenia funkcionálnej rovnice v obore R:

(a) $f(x + y) + f(x - y) = f(x) + 6xy \,.\, \sqrt[3]{f(y)} + x^3$,
(b) $f(x + y) + f(x + 2y) = f(x) + 2xy + x^3$,
*(c) $f(x + y) - 2f(x - y) + f(x) + f(y) = 4y + 1$.

***4.** Urobte diskusiu existencie riešení funkcionálnej rovnice $f(xy) = f(x) \,.\, y^\alpha$ v obore R kde α je nejaká reálna konštanta.

5. Presvedčte sa, že funkcia cos je riešením funkcionálnej rovnice (5). Zostavte podobnú funkcionálnu rovnicu pre funkciu tg.

3. Ďalšie metódy riešenia funkcionálnych rovníc. Monotónne a spojité riešenia

Teraz sa budeme zaoberať dôležitou funkcionálnou rovnicou

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{10}$$

Riešiť ju nie je také ľahké, ako riešiť predchádzajúce rovnice. Predpokladajme, tak ako vždy, že rovnica má nejaké riešenie f na množine R. Ak položíme $x = y = 0$, máme $f(0) = f(0) + f(0)$, teda $f(0) = 0$. Ak $x = y$, dostaneme $f(x + x) = f(x) + f(x)$, teda $f(2x) = 2f(x)$ pre každé $x \in R$. Podobne $f(3x) = f(2x + x) = f(2x) + f(x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x)$, $f(4x) = 4f(x)$ atď. To nás vedie k domnienke, že pre každé prirodzené t a pre každé $x \in R$ platí:

$$f(tx) = tf(x) \tag{11}$$

Pokúsime sa dokázať to matematickou indukciou. Zrejme (11) platí pre $t = 1$. Predpokladajme, že (11) platí pre nejaké prirodzené k, teda $f(kx) = kf(x)$; stačí dokázať, že (11) platí pre $t = k + 1$. Ale $f((k + 1)\,x) = f(kx + x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k + 1)\,f(x)$ (pri druhej rovnosti sme využili (10) a pri tretej indukčný predpoklad). Teda (11) platí pre každé prirodzené číslo t.

Ďalej nech n je prirodzené číslo. Dosaďme do vzťahu (11) $t = n$, $x = 1/n$. Dostaneme $f(1) = f\left(n \,.\, \frac{1}{n}\right) = n \,.\, f\left(\frac{1}{n}\right)$, teda pre každé prirodzené n platí:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1) \tag{12}$$

Ak m/n je nejaké kladné racionálne číslo, $(m, n > 0)$, potom

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = m\left(\frac{1}{n} f(1)\right) = \frac{m}{n} f(1)$$

(pri druhej rovnosti sme použili (11), pri tretej (12)). Pretože pre každé $x \in R$ platí $0 = f(x - x) = f(x) + f(-x)$, platí $f(x) = -f(-x)$. Teda $f\left(-\frac{m}{n}\right) = -f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(-\frac{m}{n}\right) f(1)$. Dokázali sme teda pomocnú vetu, ktorá bude pre nás v ďalšom veľmi užitočná.

Lema. Nech f je funkcia definovaná na množine R všetkých reálnych čísel, ktorá je riešením funkcionálnej rovnice (10). Potom pre každé racionálne číslo r platí:

$$f(r) = rf(1) \tag{13}$$

Poznámka 1. Ak sa dôkaz lemy zdá príliš ťažký, možno ho rozložiť na „etapy". Najprv hľadať všetky riešenia rovnice (10) na množine všetkých nezáporných celých čísel, potom na množine všetkých celých čísel, racionálnych čísel a pod. Odporúčam podobne postupovať aj v škole. Dôkaz potom môžu robiť postupne viacerí žiaci pri tabuli ako cvičenie. (Pozri tiež cvičenia na konci tohto odseku.)

Z práve dokázanej lemy okrem iného vyplýva, že ak poznáme hodnotu funkcie f v bode 1, poznáme jej hodnotu v každom racionálnom bode. Ale z faktu, že f je riešením rovnice (10), nemožno odvodiť nijakú „rozumnú" podmienku pre to, ako súvisia hodnoty funkcie f v iracionálnych číslach s jej hodnotou v bode 1. Je zrejmé — môžeme sa o tom presvedčiť dosadením — že funkcia f definovaná vzťahom (13) pre každé reálne r je riešením rovnice (10), ale nie je pravda, že tieto riešenia sú všetky riešenia rovnice (10)[1].

Ak však od funkcie f, ktorá je riešením rovnice (10), budeme požadovať, aby mala ešte nejakú ďalšiu vhodnú vlastnosť, potom podmienka (13) bude už splnená pre všetky $r \in R$. Takou vlastnosťou je napríklad monotónnosť. Pripomeňme si, čo to je. Hovoríme, že funkcia f je neklesajúca, ak pre každé dva body x, y z jej definičného oboru také, že $x < y$, platí $f(x) \leqq f(y)$. Hovoríme, že funkcia f je nerastúca, ak pre každé dva body x, y, kde $x < y$, z jej definičného oboru platí $f(x) \geqq f(y)$. A konečne hovoríme, že funkcia je monotónna, ak je nerastúca alebo neklesajúca.

---

[1]) Možno dokázať, aj keď pomerne zložitým spôsobom, ktorý presahuje rámec tohto článku, že existuje funkcia f, definovaná na R, ktorá je riešením rovnice (10) a pritom nemá tú vlastnosť, že (13) platí pre každé reálne číslo r. Poznamenajme len, že je to funkcia veľmi „bláznivá", ktorú ani nemožno znázorniť pomocou jej grafu.

Skúsme zistiť, ako vyzerajú všetky monotónne riešenia rovnice (10) na množine R. Nech f je takým riešením. Podľa lemy platí vzťah (13) pre každé racionálne r. Ukážeme, že tento vzťah platí pre každé reálne r. Postupujme nepriamo. Nech existuje $x \in R$ také, že $f(x) \neq xf(1)$. Potom buď $f(x) < x \,.\, f(1)$, alebo $f(x) > x \,.\, f(1)$. V prvom prípade nájdeme také racionálne čísla r_1, r_2, že $r_1 < x < r_2$ a pritom $r_1 f(1) > f(x)$ aj $r_2 f(1) > f(x)$ (nakreslite si obrázok!). Potom bude platiť $f(r_1) > f(x)$ aj $f(r_2) > f(x)$, a teda f nebude monotónna. Takže predpoklad, že (13) neplatí pre všetky $r \in R$, vedie k sporu. V prípade, že $f(x) > xf(1)$ postupujeme podobne. Dokázali sme teda, že ak f je monotónnym riešením rovnice (10) na množine R, tak $f(x) = ax$ pre všetky $x \in R$. Obrátené tvrdenie platí tiež, a teda všetky monotónne riešenia rovnice (10) sú všetky funkcie $f(x) = ax$, $x \in R$. Dokázali sme túto vetu:

Veta 1. Monotónna funkcia f definovaná na R je riešením funkcionálnej rovnice (10) práve vtedy, keď pre každé $x \in R$ platí $f(x) = ax$, kde $a \in R$ je nejaká konštanta.

Poznámka 2. Ak by sa zdal dôkaz vety príliš ťažký, môžeme ho vynechať a dôkaz vety znázorniť na grafe funkcie $f(r) = r \,.\, f(1)$ pre racionálne r. Z náčrtku je zrejmé, že ak f je monotónna, potom $f(x) = x \,.\, f(1)$ pre každé $x \in R$. Bolo by vhodné pri tejto príležitosti upozorniť, že pre $f(1) \geqq 0$ je f neklesajúca a pre $f(1) \leqq 0$ je f nerastúca.

Poznámka 3. Veta 1 platí aj v prípade, keď uvažujeme len riešenia definované na množine všetkých nezáporných reálnych čísel (pozri cvičenia na konci odseku). Tento fakt je účinným liekom na rôzne omyly typu $1/(a + b) = 1/a + 1/b$, alebo $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ a pod.: Funkcie $1/x$ a $\sqrt{x}$ sú monotónne funkcie a nie sú to funkcie tvaru ax, teda nemôžu byť riešením rovnice (10).

Podobné metódy, ako sme uplatnili pri dôkaze lemy a vety 1 môžeme použiť aj v nasledujúcom príklade.

Príklad 5. Nájsť všetky monotónne riešenia funkcionálnej rovnice (1), definované na množine R^+ všetkých kladných reálnych čísel.

Riešenie: Nech f je monotónne riešenie rovnice (1). Pretože pre každé $x \in R^+$ platí $f(x) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}x\right)\right]^2 \geqq 0$, funkcia f je nezáporná. Z (1) dostávame $f(2x) = f(x) \,.\, f(x) = (f(x))^2$, $f(3x) = (f(x))^3$, atď., indukciou dostávame

$$f(nx) = (f(x))^n \tag{14}$$

pre každé prirodzené číslo n (urobte dôkaz indukciou podrobne!). Ak v (14) položíme $x = 1/n$, dostaneme $f(1) = f\left(n \,.\, \frac{1}{n}\right) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$, a teda

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (f(1))^{\frac{1}{n}} \tag{15}$$

Ak m, n sú prirodzené čísla, tak zo (14) a (15) dostávame

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = \left[(f(1))^{\frac{1}{n}}\right]^m = [f(1)]^{\frac{m}{n}}$$

Teda pre každé kladné racionálne číslo r platí

$$f(r) = (f(1))^r \tag{16}$$

(Nakreslite si obrázok!) Z podmienky, že funkcia f je monotónna, dostávame, že (16) platí pre každé kladné reálne číslo r.

Teda ak f je monotónnym riešením rovnice (1), tak f je funkcia definovaná v každom $r \in R^+$ vzťahom (16). Obrátene, každá takáto funkcia je riešením rovnice (1). Teda všetky monotónne funkcie definované na R^+, ktoré sú riešením rovnice (1), sú všetky funkcie tvaru $f(x) = a^x$, kde a je nejaké nezáporné reálne číslo.

Podobným spôsobom možno riešiť veľa iných funkcionálnych rovníc. V niektorých prípadoch môžeme priamo použiť vetu 1, ako to uvidíme v ďalšom príklade.

Príklad 6. Nájsť všetky monotónne funkcie f, definované na množine R^+ všetkých kladných reálnych čísel, pre ktoré platí (4), t. j.

$$f(xy) = f(x) = f(y)$$

Riešenie: Nech f je riešením rovnice (4). Definujme novú funkciu F na R vzťahom $F(t) = f(e^t)$. Pretože e^t aj f sú monotónne funkcie, aj funkcia F bude monotónna. Skutočne, nech napríklad f je neklesajúca a nech $t_1 < t_2$. Potom $e^{t_1} < e^{t_2}$, a teda $F(t_1) = f(e^{t_1}) \leqq f(e^{t_2}) = F(t_2)$ (urobte podrobne ostatné prípady!). Pre každé dve čísla $t_1, t_2 \in R$ platí

$$F(t_1 + t_2) = f(e^{(t_1+t_2)}) = f(e^{t_1} \cdot e^{t_2}) = f(e^{t_1}) + f(e^{t_2}) = F(t_1) + F(t_2)$$

Teda F je montónnym riešením funkcionálnej rovnice (10), a preto podľa vety 1 $F(t) = at$ pre každé $t \in R$. Takže $f(e^t) = at$, a teda (ak si číslo e^t označíme symbolom y) pre všetky $y \in R^+$ (prečo?)

$$f(y) = a \cdot \ln(y) \tag{17}$$

Obrátene, každá funkcia tvaru (17) je riešením rovnice (4).

V dôkaze vety 1 sme postupovali takto: Mali sme nejakú funkciu f, jej hodnoty na množine Q všetkých racionálnych čísel boli predpísané, pre každé $r \in Q$ platilo $f(r) = r \cdot f(1)$. Z tohoto faktu a zo skutočnosti, že f je monotónna funkcia, sme už vedeli určiť jej hodnotu v každom reálnom čísle. Všimnite si, že sme pritom nikde nevyužívali skutočnosť, že f je

riešením nejakej rovnice. Inak povedané, k funkcii h, definovanej na Q predpisom $h(r) = r \,.\, f(1)$, existuje jediná monotónna funkcia f definovaná na R tak, že $f(r) = h(r)$ pre každé $r \in Q$. V tomto prípade hovoríme, že funkcia f definovaná na R je rozšírením funkcie h definovanej na „menšej" množine Q[2]). Z ďalšieho príkladu vidíme, že nie každá funkcia definovaná na Q má takú vlastnosť ako funkcia h.

Príklad 7. Nech g je funkcia definovaná na množine Q všetkých racionálnych čísel predpisom $g(x) = 0$ pre $x \in Q$, $x < \sqrt{2}$ a $g(x) = 1$ pre $x \in Q$, $x \geqq \sqrt{2}$ (ako vieme, $\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo, teda namiesto poslednej neostrej nerovnosti možno písať aj $x > \sqrt{2}$). Zrejme funkcia g je monotónna, presnejšie povedané, je neklesajúca. A pritom existuje nekonečne veľa monotónnych funkcií w, definovaných na R a takých, že $g(x) = w(x)$ pre každé $x \in Q$ (urobte si náčrt!). Totiž funkcia w, ktorá má byť rozšírením funkcie g, musí byť takáto: $w(x) = 0$ pre $x < \sqrt{2}$, $w(x) = 1$ pre $x > \sqrt{2}$, ale $w(\sqrt{2})$ môže byť ľubovoľné reálne číslo ležiace v uzavretom intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

Kým budete čítať ďalej, pokúste sa zdôvodniť, prečo funkcia h má jediné monotónne rozšírenie, zatiaľ čo funkcia g ich má nekonečne veľa. Z náčrtku je to jasné. Funkcia h má spojité rozšírenie f a funkcia g nemá spojité rozšírenie, pretože funkcia w nie je spojitá v bode $x = \sqrt{2}$ (teda v tom bode, v ktorom je porušená „jednoznačnosť" funkcie w).

Zdá sa teda, že ak rozšírená funkcia je spojitá (v každom bode), tak je jednoznačne určená. Ukážeme, že je to skutočne tak.

Najskôr si však spresníme niektoré pojmy. Nech $a \in R$. Pod okolím bodu a budeme rozumieť každý otvorený interval, ktorý obsahuje číslo a. Nech A a B sú nejaké množiny reálnych čísel a nech $A \subset B$. Budeme hovoriť, že množina A je hustá v množine B, ak v ľubovoľnom okolí každého bodu množiny B leží nejaký bod množiny A (nakreslite si obrázok, termín „hustá množina" je veľmi výstižný). Tak napríklad množina všetkých racionálnych čísel je hustá v množine R, ale aj množina všetkých čísel tvaru $m \,.\, 2^{-n}$, m celé, n prirodzené, je hustá v množine R (dokážte to!). A ešte jeden príklad: Jediná podmnožina množiny Z všetkých celých čísel, ktorá je hustá v Z, je množina Z (nakreslite si obrázok!).

Teraz už môžeme dokázať túto dôležitú vetu:

Veta 2. Nech f a g sú dve spojité funkcie definované na nejakej množine A. Nech B je hustá podmnožina množiny A a nech pre každé $x \in B$ platí $f(x) = g(x)$. Potom $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in A$, t. j. $f = g$.

---

[2]) Presná definícia pojmu rozšírenie funkcie je takáto: Nech D_1 je definičným oborom funkcie f_1, D_2 definičným oborom funkcie f_2. Ďalej nech $D_1 \subset D_2$ a nech pre každé $x \in D_1$ platí $f_1(x) = f_2(x)$. Potom hovoríme, že f_2 je rozšírením funkcie f_1.

Vetu môžeme sformulovať aj takto: Dve spojité funkcie s tým istým definičným oborom sa rovnajú, ak majú rovnaké hodnoty na nejakej hustej podmnožine svojho definičného oboru.

Dôkaz vety: Skúste si najskôr znázorniť situáciu na obrázku. Teraz urobíme presný dôkaz. Postupujme nepriamo. Predpokladajme, že f, g sú spojité na A, majú tie isté hodnoty na množine B a pritom existuje bod $x \in A - B$ (t. j. bod x, ktorý patrí do A a nepatrí do B), v ktorom $f(x) \neq g(x)$. Budeme predpokladať, že $f(x) > g(x)$ (v prípade opačnej nerovnosti je dôkaz podobný).

Nech

$$f(x) - g(x) = a > 0 \tag{18}$$

Keďže funkcia f je spojitá v bode x, existuje také okolie $O_f(x)$ bodu x, že pre každé $y \in A \cap O_f(x)$ je $|f(x) - f(y)| < a/2$. Podobne existuje také okolie $O_g(x)$ bodu x, že pre $y \in A \cap O_g(x)$ platí $|g(x) - g(y)| < a/2$. Pretože B je hustá v A, existuje v množine B nejaký bod z, ktorý patrí do $A \cap O_f(x) \cap O_g(x)$. Pretože $f(z) = g(z)$, platí $|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(z) + f(z) - g(x)| = |f(x) - f(z) + g(z) - g(x)| \leqq |f(x) - f(z)| + |g(z) - g(x)| < a/2 + a/2 = a$, a to je spor s (18). Vetu 2 sme dokázali.

Poznámka 4. Dôkaz vety 2 pravdepodobne v tejto podobe nebude možné použiť pri vyučovaní. V každom prípade však odporúčam vetu 2 prebrať, a uspokojiť sa prípadne len s „dôkazom" pomocou náčrtku. Napokon, dôkaz, tak ako bol podaný, možno tiež priebežne „kresliť". Dôkaz vety 2 možno zjednodušiť tak, že sa odvoláme na fakt, že rozdiel dvoch spojitých funkcií je spojitá funkcia a vyšetrujeme potom funkciu $f - g$.

Veta 2 má zaujímavé dôsledky. Okrem iného môže byť často užitočná pri hľadaní spojitých riešení funkcionálnych rovníc.

Príklad 8. Nájsť všetky spojité riešenia funkcionálnej rovnice (10) definované na množine R všetkých reálnych čísel.

Riešenie: Nech f je spojitým riešením rovnice (10) na R. Podľa lemy pre každé racionálne číslo $r \in Q$ platí $f(r) = r \,.\, f(1)$. Funkcia g, definovaná vzťahom $g(x) = x \,.\, f(1)$ pre každé $x \in R$, je spojitá a v každom bode množiny Q má rovnajú hodnotu ako funkcia f. Keďže Q je hustá podmnožina množiny R, podľa vety 2 musí byť $f = g$. Teda pre každé $x \in R$ platí $f(x) = x \,.\, f(1)$.

Obrátene, každá funkcia h definovaná na R vzťahom $h(x) = x \,.\, a$, kde a je nejaká konštanta, je spojitým riešením rovnice (10).

Teda spojitá funkcia f definovaná na R je riešením rovnice (10) práve vtedy, keď pre každé $x \in R$ platí $f(x) = ax$, kde a je nejaká konštanta.

Podobným spôsobom možno hľadať spojité riešenia iných rovníc, napríklad takých, aké sú uvedené v cvičeniach.

6. Nájdite všetky riešenia funkcionálnej rovnice (10) na množine

(a) všetkých celých čísel;
(b) všetkých racionálnych čísel;
(c) všetkých čísel tvaru $r \,.\, \sqrt{2}$, r racionálne číslo.

7. Urobte to isté ako v cvičení **6** s funkcionálnou rovnicou (1).

8. Nájdite všetky riešenia funkcionálnej rovnice (4) na množine

(a) všetkých čísel tvaru 2^m, m celé číslo;
(b) všetkých čísel tvaru 2^r, r racionálne číslo;
(c) všetkých čísel tvaru a^r, r racionálne číslo, a kladná konštanta.

9. Urobte to isté ako v cvičení **8** s funkcionálnou rovnicou $f(xy) = f(x) \,.\, f(y)$.

10. Nájdite všetky riešenia každej z uvedených funkcionálnych rovníc na množine všetkých racionálnych čísel

*(a) $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)$;
(b) $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$.

11. Na množine všetkých nezáporných reálnych čísel nájdite všetky monotónne riešenia

(a) rovnice (10);
*(b) rovnice (1).

12. Nájdite všetky spojité riešenia každej z uvedených funkcionálnych rovníc na množine všetkých kladných reálnych čísel:

(a) $f(xy) = f(x) \,.\, f(y)$;
(b) $f(x^y) = f(x)$, $y \in R+$ je premenná.

13. Nájdite všetky spojité riešenia funkcionálnych rovníc z cvičenia 10 na množine všetkých reálnych čísel.

4. Použitie funkcionálnych rovníc

Vráťme sa teraz k našej úlohe s rybármi. Bolo treba nájsť nerastúcu funkciu f, definovanú na množine všetkých nezáporných reálnych čísel, ktorá vyhovuje funkcionálnej rovnici

$$f(x + y) = f(x) \,.\, f(y)$$

Ale takú funkciu sme už našli v cvičení 11(b). Podmienka, že f je nerastúca, dáva tieto možnosti:

(a) $f(0) = 1$, $f(t) = 0$ pre $t > 0$, alebo
(b) $f(t) = a^t$, kde a je kladná konštanta (a samozrejme $a < 1$). Prípad (a) môže vystihovať skutočnosť azda len v prípade jedného rybára, ktorý okamžite po príchode chytí rybu. Riešením úlohy preto bude funkcia (b). Ako túto funkciu interpretovať? Inak povedané, čo nám táto funkcia hovorí? Číslo $n \,.\, a^t$ bude pravdepodobný počet rybárov pri rybníku v čase t. Je jasné, že čím väčší bude počiatočný počet n rybárov, tým lepšie bude uvedená funkcia vystihovať skutočnosť.

Príklad s chytaním rýb sa mohol zdať umelo skonštruovaný, ale tá istá situácia sa vyskytuje veľmi často v praxi. Uvedieme preto niekoľko serióznych príkladov.

Príklad 9. Rádioaktívne prvky sa s postupom času štiepia a menia sa na iné prvky. Skúsme nájsť závislosť tohto rozpadu od času. Majme počiatočné množstvo m gramov nejakého rádioaktívneho prvku a nech jeho množstvo v čase t je $m \,.\, f(t)$. Podobne ako v príklade s rybármi prijmeme predpoklad (ktorý bol overený experimentálne), že v rovnakých časových intervaloch je pomer množstva prvku na začiatku intervalu k jeho množstvu na konci intervalu rovnaký. Porovnáme dva rovnako dlhé časové intervaly $\langle 0, h\rangle$ a $\langle t, t + h\rangle$. Na základe nášho predpokladu platí:

$$m/(m \,.\, f(h)) = (m \,.\, f(t))/(m \,.\, f(t + h))$$

t. j.

$$f(t + h) = f(t) \,.\, f(h)$$

Teda množstvo prvku v čase t bude $m \,.\, a^t$, kde a je nejaká kladná konštanta ($a < 1$), ktorá závisí len od toho prvku (rôzne prvky sa štiepia rôznou rýchlosťou). V tomto prípade už bude funkcia $m \,.\, a^t$ veľmi presne vystihovať skutočnosť, lebo počet atómov v našej vzorke prvku bude veľké číslo.

Príklad 10. Výkyvy rozhojdaného kyvadla (povedzme dostatočne ťažkého závažia na dosť dlhej niti) sa vplyvom odporu vzduchu zmenšujú, pri malých výkyvoch vykonáva kyvadlo tzv. tlmený harmonický pohyb. Hľadáme závislosť amplitúdy kyvadla od času. Pri malých výkyvoch sa budú amplitúdy výkyvov v rovnakých intervaloch zmenšovať v rovnakých pomeroch. Táto úvaha teda zasa vedie k rovnici (1).

Príklad 11. Raketa, ktorá letí v kozmickom priestore, má počiatočnú hmotu m_0. Keď na nejaký čas zapne motory, zmenší sa jej hmota na m_1 (úbytok pohonných hmôt) a raketa získa nejakú rýchlosť. Zaujíma nás, od čoho závisí prírastok rýchlosti δ. Rozhodujúci je pomer hmôt m_0/m_1. Prírastok rýchlosti pri zmene hmôt v pomere m_0/m_1 označme $\delta(m_0/m_1)$. Keď raketa prejde zo stavu m_0 cez stav m_1 do stavu m_2, zmenu jej rýchlosti môžeme vyjadriť dvoma spôsobmi: buď ako $\delta(m_0/m_2)$, alebo ako súčet prírastkov rýchlostí $\delta(m_0/m_1) + \delta(m_1/m_2)$. Dostávame rovnosť $\delta(m_0/m_2) = \delta(m_0/m_1) + \delta(m_1/m_2)$. Ak položíme $m_0/m_1 = x$, $m_1/m_2 = y$, dostaneme pre δ funkcionálnu rovnicu $\delta(xy) = \delta(x) + \mathrm{d}(y)$. Riešenie hľadáme na množine všetkých reálnych čísel $\geqq 1$. Ak od funkcie δ požadujeme aj monotónnosť (pri väčšom pomere m_0/m_1 bude aj prírastok rýchlosti $\delta(m_0/m_1)$ väčší), dostávame $\delta(x) = c \,.\, \ln x$ pre každé $x > 1$; c je nejaká kladná konštanta.

Príklad 12. Vráťme sa opäť k úlohe s rybármi. Predpokladajme, že k rybníku neprídu všetci naraz, ale že prichádzajú postupne, a tak, že v rovnakých časových intervaloch ich príde rovnaký počet. Zaujíma nás, ako závisí počet rybárov pri rybníku od času. Čas zase začneme merať v okamihu, keď prvý rybár začne chytať ryby. Počet rybárov pri rybníku v čase t označíme symbolom $h(t)$. Hľadajme funkciu h. Počet rybárov, ktorí v čase $t + s$ pri rybníku chytajú ryby, možno vyjadriť dvoma spôsobmi, jednak ako $h(t + s)$ a jednak takto: V čase t ich bude pri rybníku $h(t)$ a z týchto $h(t)$ rybárov ich pri rybníku v čase $t + s$ zostane $h(t) \,.\, a^s$ (a je konštanta z prvej úlohy o rybároch) a pribudne k nim $h(s)$ rybárov. Dostaneme funkcionálnu rovnicu

$$h(t + s) = h(t) \,.\, a^s + h(s) \tag{19}$$

ktorú vyriešime nasledovne: Okrem (19) platí aj

$$h(t + s) = h(s + t) = h(s) \,.\, a^t + h(t)$$

a porovnaním dostaneme

$$h(t) \,.\, a^s + h(s) = h(s) \,.\, a^t + h(t)$$

Ak v tomto vzťahu položíme $s = 1$, dostaneme riešenie

$$h(t) = h(1) \,.\, \frac{a^t - 1}{a - 1}, \text{ pre všetky } t \geqq 0$$

Načrtnite si graf funkcie h! Zo začiatku bude počet rybárov pri rybníku stúpať, a potom sa ustáli (vypočítajte limitu funkcie h pre $t = \infty$; uvedomte si, že $a < 1$).

Poznámka 5. Pri počítaní týchto príkladov je pre ľahšie pochopenie výhodné znázorniť si situáciu takým diagramom, ako v úvodnom príklade s rybármi.

Podobné situácie ako v uvedených príkladoch sú aj v pripojených cvičeniach. Všetky príklady okrem iného ukazujú, že funkcie a^x, resp. e^x a $\ln x$ sú veľmi dôležité funkcie, pretože vystihujú časté typy funkčnej závislosti.

Cvičenia

14. Voda pohlcuje svetlo. Je známe, že napríklad v mori vo veľkých hĺbkach je tma. Zistite, ako závisí od hĺbky intenzita svetelného lúča prichádzajúceho od hladiny. (Návod: rovnako silné vrstvy vody znižujú intenzitu svetla v rovnakom pomere.)

15. Suma peňazí uložená na úročnú vkladnú knižku postupom času vzrastá. Zistite ako (pri jednorazovom vklade).

16. Nájdite, ako vzrastá výška vkladu na úročnej vkladnej knižke pri pravidelnom sporení. (Návod: Pozri *príklad 12.*)

17. Pri bombardovaní niektorých prvkov neutrónmi (napr. v atómovom reaktore) vznikajú rádioaktívne izotopy, ktoré sú nestále a s postupom času sa štiepia. Vložme do reaktora vzorku, ktorá obsahuje určité množstvo takého prvku. Budeme predpokladať, že na izotop sa premieňa len nepatrná časť vzorky, a teda že izotop vo vzorke vzniká stále rovnakou rýchlosťou, t. j. v rovnako dlhých časových intervaloch vznikne rovnaké množstvo izotopu. Zistite, aké bude celkové množstvo $h(t)$ izotopu vo vzorke v čase t. Vyšetrite priebeh funkcie h a vysvetlite, prečo sa po určitom čase množstvo izotopu vo vzorke už prakticky nebude zväčšovať.

***18.** Rozpadom rádioaktívneho prvku x vzniká rádioaktívny prvok y, z ktorého napokon vzniká stabilný prvok z. V čase $t = 0$ začneme pozorovať určité množstvo čistého prvku x. Po určitom čase dostaneme namiesto prvku x zmes všetkých troch prvkov. Určite množstvo prvku y v tejto zmesi.

Výsledky cvičení

1. (a) $f(x) = f(0)$; (b) $f(x) = f(0)$; (c) $f(x) = f(0) \,.\, e^x$.

2. (a) $f(x) = f(1) \,.\, x^\alpha$; (b) $f(x) = f(e) \,.\, \ln x$; (c) $f(x) = a$ pre $0 < x < 1$, $f(1) = b$, $f(x) = c$ pre $x > 1$; a, b, c sú konštanty.

3. (a) $f(x) = x^3$; (b) nemá riešenie; (c) $f(x) = x + 1$. (Návod: Vypočítajte najskôr $f(0)$, a potom si postupne vyjadrite funkcie $f(2t)$, $f(3t)$ $f(4t)$ pomocou $f(t)$. Využite to, že $f(4t) = f(2t + 2t) = f(3t + t)$.)

4. Ak α je nezáporné celé číslo, tak riešením rovnice je funkcia $f(x) = f(1) \,.\, x^\alpha$; v ostatných prípadoch riešenie neexistuje.

5. Funkcionálnou rovnicou pre tg je napríklad rovnica $f(x + y)\,(1 - f(x)\,f(y)) = f(x) + f(y)$.

6. (a) $f(x) = f(1) \,.\, x$; (b) $f(x) = f(1) \,.\, x$; (c) $f(x) = f(\sqrt{2}) \,.\, x/\sqrt{2}$.

7. (a) $f(x) = (f(1))^x$; (b) $f(x) = (f(1))^x$; (c) $f(x) = (f(\sqrt{2}))^x$.

8. (a) $f(x) = f(2) \,.\, \log_2 x = (f(2)/\ln 2) \,.\, \ln x$; (b) $f(x) = f(2) \,.\, \log_2 x$; (c) $f(x) = f(a) \,.\, \log_a x$.

9. (a) $f(x) = f(2)^\alpha = x^\beta$, kde $\alpha = \log_2 x$, $\beta = (\ln f(2))/\ln 2$; (b) to isté ako v (a); (c) $f(x) = f(a)^\alpha = x^\beta$, kde $\alpha = \log_a x$, $\beta = (\ln f(a))/\ln a$.

10. (a) $f(x) = x(f(1) - f(0)) + f(0) = ax + b$; a, b sú konštanty; (b) $f(x) = x^2 \,.\, f(1)$.

11. (a) $f(x) = x \,.\, f(1)$; (b) $f(x) = a^x$ pre $x > 0$, kde a je nezáporná konštanta; ak $a > 0$, tak $f(0) = 1$; ak $a = 0$, tak $f(0)$ môže byť 0 alebo 1.

12. (a) $f(x) = x^\alpha$ kde $\alpha = (\ln f(2))/\ln 2$ (využite cvičenie **9** (b) a vetu 2); (b) $f(x) = f(1)$ (využite cvičenie **2** (c)).

13. (a) $f(x) = ax + b$; (b) $f(x) = x^2 \,.\, f(1)$.

14. Nech $I(0)$ je intenzita svetelného lúča pri hladine a $I(h)$ jeho intenzita v hĺbke h. Potom $I(h) = I(0) \,.\, b^h$, kde b je kladná konštanta < 1.

15. Ak $S(0)$ je počiatočný vklad, tak vklad $S(t)$ v čase t bude $S(t) = S(0) \,.\, (1 + p)^t$, kde p je úrok za jednotku času.

16. Vklad v čase t bude $S(t) = S(1) \,.\, ((1 + p)^t - 1) \,.\, p^{-1}$, kde p je úrok za jednotku času.

17. $h(t) = h(1) \,.\, (a^t - 1) \,.\, (a - 1)^{-1}$, kde a je konštanta, ktorá charakterizuje rozpad toho izotopu ((pozri *príklad 9*).

18. Nech sa prvok x (resp. prvok y) štiepi tak, že pomer množstva prvku x (resp. prvku y) v čase t k jeho množstvu v čase 0 je a^t (resp. b^t), pozri *príklad 9*. Nech počiatočné množstvo prvku x je m gramov. Nech $m \,.\, g(t)$ znamená množstvo prvku y

v zmesi v čase t. Počítajme $m \,.\, g(t + h)$: V čase t bude v zmesi $m \,.\, g(t)$ gramov prvku y, z ktorého v čase $t + h$ zostane len $m \,.\, g(t) \,.\, b^h$ gramov. Ďalej v čase t bude v zmesi $m \,.\, a^t$ gramov prvku x a výsledkom štiepenia tohto množstva bude v čase $t + h$ $m \,.\, a^t \,.\, g(h)$ gramov prvku y. Teda $m \,.\, g(t + h) = mg(t) \,.\, b^h + mg(h) \,.\, a^t$. Rovnicu $g(t + h) = g(t) \,.\, b^h + g(h) \,.\, a^t$ riešime podobne ako v *príklade 12*. Výsledok: $g(t) = g(1) \,.\, (b^t - a^t) \,.\, (b - a)^{-1}$.

Literatúra

[1] Aczél, J.: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Berlin 1961.

[2] Engel, A.: Systematic use of applications in mathematics teaching. Educational Studies in Math, 1 (1968—69), 202—221.

[3] Jarník, V.: Diferenciální počet II, Praha 1956, str. 219—221, 592—601.