O ROVNICIACH S PARAMETRAMI EKVIVALENTNÝCH NEROVNOSTIAM

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Táto úvaha nadväzuje na učebnú látku o nerovnostiach, ako sa preberá na SVŠ. Ukáže sa v nej, že riešenie nerovností možno vykonať riešením rovníc. Pre vyučovanie môžu mať tieto úvahy význam v niekoľkých smeroch. Môžu slúžiť na metodické motivovanie vyučovania nerovností, lebo dávajú veľmi názorný pohľad na nerovnosti a ich riešenie. Uvedú totiž nerovnosti do súvislosti s pojmom rovnice, ktorý je žiakom oveľa bližší a prístupnejší. V žiackom krúžku môžu sa tieto úvahy sústavne preberať. Tu majú veľkú výhodu v tom, že umožňujú samostatnú prácu žiakov a hravo ich zavedú do rôznych matematických disciplín. Tak si matematiku obľúbia, čo ich povzbudí k jej ďalšiemu štúdiu. Ale tieto úvahy možno použiť i v matematickej praxi a ďalej ich rozvíjať, lebo mnohé výpočty sú pomocou nich jednoduchšie než pomocou nerovností, o čom sa v ďalšom presvedčíme.

Táto úvaha je založená na vete, ktorú si teraz dokážeme.

Veta. Platí

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k$$

kde k je kladný parameter.

Dôkaz. Správnosť vety vyplýva z týchto implikácií

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) =$$
$$= k \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k, \quad k > 0$$

Obdobne sa dokážu vety

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) - k, \qquad k > 0$$
$$f(x) \geqq g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + l, \qquad l \geqq 0$$
$$f(x) \leqq g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) - l, \qquad l \geqq 0$$

V ďalších úvahách k vždy znamená kladný a l nezáporný parameter.

Na základe dokázanej vety môžeme každú nerovnosť do všetkých dôsledkov nahradiť rovnicou s parametrom a riešiť tieto rovnice. Výsledky sa potom jednoducho interpretujú aj pre dané nerovnosti. To si ukážeme na príkladoch.

Riešenie nerovností a ich sústav

Príklad 1. Riešte nerovnosť

$$\frac{5-2x}{x-7} \geqq 3$$

Riešenie. Príslušná ekvivalentná rovnica

$$\frac{5-2x}{x-7} = 3 + l$$

má jednoparametrový systém koreňov

$$x = 7 - \frac{9}{l+5} \quad (l \geqq 0)$$

Táto jednoparametrová množina čísel obsahuje zrejme čísla, ktoré spĺňajú nerovnosti

$$\frac{26}{5} = 7 - \frac{9}{5} \leqq x < 7 \tag{1}$$

Tento výpočet bol jednoduchší než je obvyklý, pri ktorom treba rozlišovať prípady $x > 7$ a $x < 7$. Toho tu netreba, lebo riešime rovnicu a nie nerovnosť. Je síce pravda, že k analýze jednoparametrovej množiny koreňov treba náročnú úvahu, je to však veľmi dobrá príležitosť na cvičenie funkčného myslenia. Ak chceme rozbor urobiť dôkladne, postupujeme nasledovne

$$0 < \frac{9}{l+5} \leqq \frac{9}{5}$$

lebo pri dostatočne veľkom $l \geqq 0$ je hodnota zlomku $\frac{9}{l+5}$ ľubovoľne malé kladné číslo. Je dôležité si tu uvedomiť, že sa tu hľadá horná a dolná hranica funkčných hodnôt a nie akékoľvek ich ohraničenie. Potom

$$-\frac{9}{5} \leqq -\frac{9}{l+5} < 0$$

odkiaľ plynie (1).

Príklad 2. Riešte nerovnosť

$$2x^2 - 3x + 1 \leqq 0$$

Riešenie. Príslušná ekvivalentná rovnica

$$2x^2 - 3x + 1 + l = 0$$

má korene

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1 - 8l}}{4}$$

Každý z koreňov spĺňa podmienku

$$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$$

Poznámka. Ohraničenosť množiny týchto koreňov je vyjadrená tou okolnosťou, že parameter l môže nadobudnúť len také hodnoty, pri ktorých je $1 - 8l \geqq 0$, teda

$$0 \leqq l \leqq \frac{1}{8}$$

Keď v oboch množinách uplatníme tieto krajné hodnoty, dostaneme dva intervaly, ktorých zjednotenie je uzavretý interval $\left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$.

Teraz ukážeme výhodnosť metódy na príklade vybranom z úloh MO.

Príklad 3. Riešte nerovnosť

$$(x + a)(x + b) \leqq (x + c)(x + d)$$

Riešenie. Príslušnú ekvivalentnú rovnicu

$$(x + a)(x + b) = (x + c)(x + d) - l$$

upravíme na tvar

$$(a + b - c - d)\,x = cd - ab - l$$

1. Nech je $a + b - c - d = 0$, $cd - ab \geqq 0$, potom $l = cd - ab \geqq 0$, a teda každé číslo je koreňom. Ak je však $cd - ab < 0$, teda $l = cd - ab < 0$, čo je vylúčené, žiadne číslo nie je koreňom.

2. Nech $a + b - c - d \neq 0$, je

$$x = \frac{cd - ab}{a + b - c - d} - \frac{l}{a + b - c - d}$$

Ak je tu $a + b - c - d > 0$, je

$$x \leqq \frac{cd - ab}{a + b - c - d},$$

ak je však $a + b - c - d < 0$, je

$$x \geqq \frac{cd - ab}{a + b - c - d}$$

Touto metódou môžeme riešiť aj sústavy nerovností s jednou neznámou vyšších stupňov.

Zvlášť výhodná je naša metóda pri riešení sústav nerovností s viacerými neznámymi.

Príklad 4. Riešte sústavu nerovností $x - 3y \geqq 6$, $2x - y \leqq 4$ a načrtnite graf geometrického útvaru, ktorého súradnice bodov sú koreňmi tejto sústavy.

Riešenie. Z príslušných ekvivalentných rovníc

$$x - 3y = 6 + l, \quad 2x - y = 4 - l'$$

dostaneme korene

$$x = \frac{6}{5} - \frac{3l' + l}{5}, \quad y = -\frac{8}{5} - \frac{2l + l'}{5}$$

Tu už nemožno vyjadriť korene jednoducho nerovnosťami. Mohli by sme síce písať $x \leqq \frac{6}{5}$, $y \leqq -\frac{8}{5}$, to nám však nijak neprezrádza priradenie dvojíc koreňov a museli by sme k zvolenému koreňu x určiť celú množinu priradených koreňov y z niektorej danej nerovnosti. Naše parametrové vyjadrenie koreňov má tu veľkú výhodu.

Na *obr. 1.* je naznačený dutý uhol, ktorý je grafom danej sústavy nerovností. Bod $A \equiv \left[\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right]$ je, pravdaže, jeho vrcholom. Sústava daných rovníc znamená spoločnú časť dvoch polrovín, ktorá tvorí dutý uhol. Ako však vieme z planimetrie, sú aj iné možnosti.

Význam majú aj lineárne sústavy nerovností s dvoma neznámymi, ktoré pozostávajú z viac než dvoch nerovností. Geometricky to značí spoločnú časť niekoľkých polrovín, napr. množinu bodov vypuklého mnohouholníka, ktorú môžeme takto vyjadriť parametricky. Ukážeme si to pri trojuholníku, ktorý definujeme ako ohraničený prienik troch polrovín tejže roviny.*)

*) Hraničné priamky polrovín musia byť rôzne a ich prienik musí byť prázdna množina.

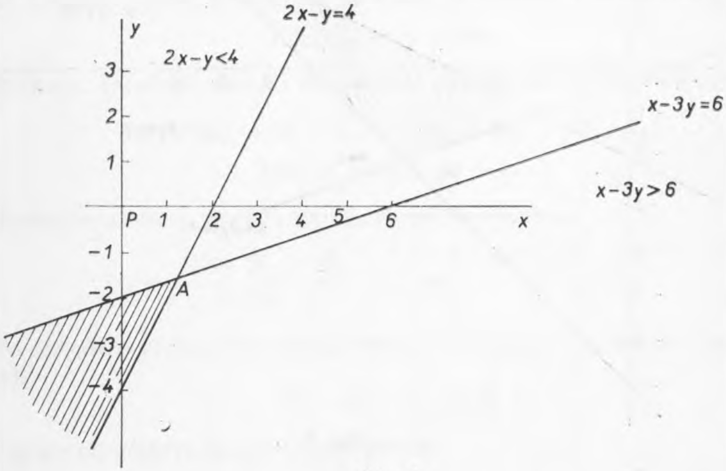
Príklad 5. Dokážte, že korene sústavy nerovností

$$x + 3y \geqq -1, \qquad x - 2y \geqq 4, \qquad x - y \leqq 7$$

sú súradnicami všetkých bodov istého trojuholníka (a žiadnych iných).

Riešenie. Príslušná ekvivalentná sústava rovníc je

$$x + 3y = -1 + l_1, \qquad x - 2y = 4 + l_2, \qquad x - y = 7 - l_3 \tag{1}$$



Obr. 1.

Riešením sústavy pozostávajúcej z druhej a tretej rovnice (1) dostaneme korene

$$x = 10 - l_2 - 2l_3, \qquad y = 3 - l_2 - l_3 \tag{2}$$

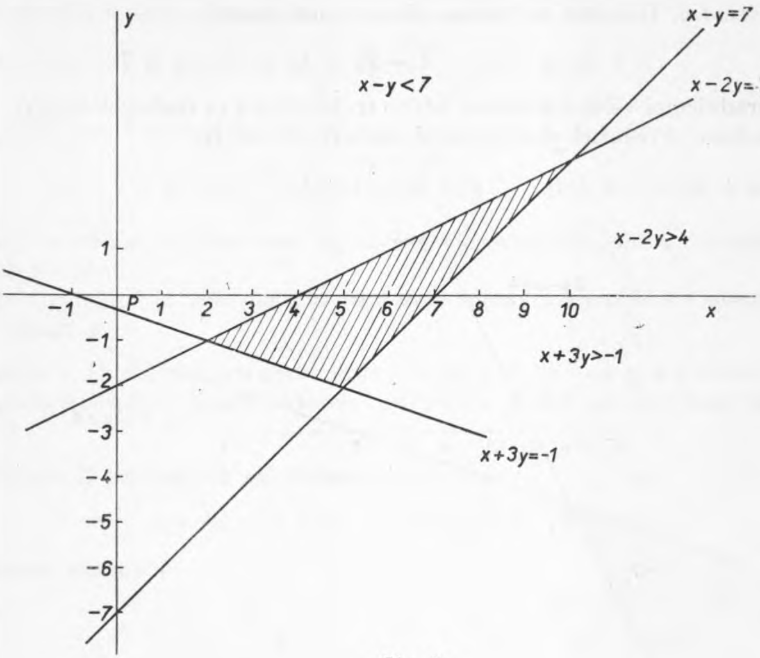
a po dosadení týchto výrazov do prvej rovnice (1) dostaneme vzťah medzi parametrami

$$l_1 + 4l_2 + 5l_3 = 20$$

Tento vzťah ukazuje, že útvar, ktorého body majú súradnice x, y, spĺňajúce dané nerovnosti, je ohraničený, menovite, že

$$0 \leqq l_1 \leqq 20, \qquad 0 \leqq l_2 \leqq 5, \qquad 0 \leqq l_3 \leqq 4$$

Grafom danej sústavy nerovností je teda trojuholník (*obr. 2*). Každý jeho vrchol leží na dvoch stranách, ktorých rovnice dostaneme, keď v rovniciach (1) kladieme parameter rovnajúci sa nule. Ak sa dva parametre rovnajú nule, dostaneme súradnice vrcholov. Pri $l_2 = l_3 = 0$ máme $x_1 = 10$, $y_1 = 3$, pri $l_1 = l_2 = 0$ je $l_3 = 4$ a teda z (2) $x_3 = 2$, $y_3 = -1$ atď.



Obr. 2.

Lineárna nerovnosť s troma neznámymi určuje polpriestor (prípadne jeho vnútorné body). Sústavy takýchto nerovností určujú spoločnú časť (prienik) takých polpriestorov, napr. mnohosteny. Súradnice bodov takýchto útvarov dostaneme touto metódou vyjadrené parametricky. Tieto geometrické úvahy sa môžu zovšeobecňovať i pre útvary n-rozmerného priestoru, napr. pre simplexy v takomto priestore. Sú to príležitosti pre zaujímavú samostatnú prácu žiakov, ktorá tých, čo majú nadanie, určite pritiahne.

Naznačenou metódou možno riešiť aj sústavy nerovností s viacerými neznámymi vyšších stupňov, napr. sústavu $x^2 + y^2 \leqq 25$, $x - 3y + 9 \leqq 0$ a pod.

Iné aplikácie

Úlohy lineárneho programovania

V 5. čísle, roč. 1961/62 *Matematiky ve škole* bol uverejnený informatívny článok o lineárnom programovaní, ktorý napísal s. Rudolf Langhammer. Niektoré úlohy s dvoma neznámymi sú tam riešené graficky. Ukážeme riešenie jednej z týchto úloh metódou rovníc s parametrami ekvivalentných nerovnostiam.

Príklad o prepustnosti tratí (príklad 4 tohto článku) má túto matematickú formuláciu:

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad 8x_1 + 9x_2 \leqq 60,$$

$$12x_1 + 8x_2 \leqq 60, \quad 10x_1 + 14x_2 \leqq 60$$

a pri splnení týchto nerovností sa hľadá maximum tzv. účelovej funkcie

$$F(x_i) = 70x_1 + 60x_2$$

Riešenie. Dané nerovnosti nahradíme ekvivalentnými rovnicami

$$8x_1 + 9x_2 = 60 - l_1, \quad 3x_1 + 2x_2 = 15 - l_2,$$

$$10x_1 + 14x_2 = 60 - l_3 \tag{1}$$

Riešením sústavy prvých dvoch rovníc dostaneme

$$x_1 = \frac{15 + 2l_1 - 9l_2}{11}, \quad x_2 = \frac{60 - 3l_1 + 8l_2}{11} \tag{2}$$

Po dosadení týchto koreňov do tretej z rovníc (1) máme pre parametre vzťah

$$2l_1 - 2l_2 - l_3 = 30 \tag{3}$$

Upravená účelová funkcia bude potom

$$\Phi(x_i) = \frac{11F(x_i)}{10} = (7x_1 + 6x_2)\,11 = 465 - 4l_1 - 15l_2 \tag{4}$$

Touto úpravou sa nezmenili podmienky pre maximum tejto funkcie. Tu nemôžeme utvoriť maximum voľbou $l_1 = l_2 = 0$, lebo vtedy vzťah (3) dá neprípustnú hodnotu $l_3 = -30$. Preto zo vzorca (3) určíme $2l_1 = 30 + 2l_2 + l_3$ a dosadíme do (4). Potom máme

$$\Phi(x_i) = 405 - 19l_2 - 2l_3$$

a tu môžeme utvoriť maximum voľbou $l_2 = l_3 = 0$, lebo vzťah (3) nám dá prípustnú hodnotu parametru $l_1 = 15$. Máme teda podľa (2)

$$x_1 = \frac{15 + 2 \cdot 15}{11} = \frac{45}{11} \doteq 4{,}1; \qquad x_2 = \frac{15}{11} \doteq 1{,}4$$

teda najviac vozov sa odvezie, ak v jednej hodine pôjde priemerne 4,1 vlaku s elektrickou lokomotívou a 1,4 vlaku s parnou lokomotívou.

Tým nie sú vyčerpané všetky možnosti použitia ukázanej metódy a azda sa k nej ešte vrátime.