ZÁKLADY TEÓRIE GRAFOV I

JURAJ BOSÁK, Bratislava

Článok podáva prehľad základných pojmov, metód a ideí teórie grafov — búrlivo sa rozvíjajúcej matematickej disciplíny, ktorá po desaťročiach živorenia v statiach špecialistov sa čoraz viacej uplatňuje v rozličných odboroch a jej elementy začínajú prenikať na školy všetkých stupňov — od základných škôl až po postgraduálne štúdium vysokých škôl. Článok možno použiť práve tak pre štúdium individuálne ako pre štúdium kolektívne — napríklad v rámci nepovinného seminára z matematiky pre štvrtý ročník gymnázií. Odporúčame čitateľovi, aby sa pokúsil samostatne si rozriešiť všetky cvičenia uvedené v texte a až potom skontroloval svoj postup vo výsledkoch cvičení, ktoré uvádzame na konci každej časti článku.

1. Pojem grafu

V každodennom živote, v matematike i v iných vedách sa často stretávame so situáciami, pri ktorých objekty jedného druhu sú pospájané pomocou objektov druhého druhu. Tak mestá sú pospájané pomocou ciest; byty pomocou telefónov; ľudia sú spojení príbuzenskými a inými vzťahmi; vrcholy mnohostenu (napr. ihlana alebo hranola) sú spojené hranami; atómy chemických prvkov sú pospájané pomocou väzieb. Keďže sa ukazuje, že takéto a podobné situácie majú viac spoločného, než by sa na prvý pohľad zdalo, je účelné ich skúmať abstraktne; aby sme to mohli robiť, potrebujeme mať nejaký názov pre objekty prvého druhu (mestá, byty, ľudia, vrcholy, atómy) i pre objekty druhého druhu (cesty, telefónne linky, medziľudské vzťahy, hrany, chemické väzby); tieto názvy si vypožičiame z príkladu, ktorý má k matematike najbližšie — od mnohostenov. Objekty prvého druhu preto nazveme vrcholy[1]) a objekty druhého druhu — hrany. Na charakterizáciu celej situácie však nestačí vymenovať vrcholy a hrany, ale treba ešte pre každú hranu stanoviť, ktoré dva vrcholy spája (pripúšťame aj prípad, že tieto dva vrcholy sa rovnajú, t. j. hrana spája vrchol sám so sebou). Namiesto vyjadrenia, že hrana h spája vrcholy u a v, budeme často tiež hovoriť, že hrana h je incidentná s vrcholmi u a v, a naopak, vrcholy u a v sú incidentné s hranou h. Pritom budeme, samozrejme, požadovať, aby žiadna hrana nebola incidentná s viac než dvoma vrcholmi.

---

[1]) Namiesto slova vrchol sa niekedy používa aj starší názov uzol.

Aby naše ďalšie úvahy mohli byť dostatočne presné, potrebujeme mať určitý matematický model predošlých situácií, ktorý nazývame grafom a príslušnú matematickú teóriu budeme nazývať teória grafov. Treba povedať, že tu ide o niečo celkom iného než o skúmanie tzv. grafov funkcií; okrem toho slovo „graf" sa používa i v mnohých iných súvislostiach (napr. vo význame „grafikon" a všeobecne pri zachytení priebehu procesov pomocou kriviek alebo iných geometrických prostriedkov). My budeme slovo „graf" používať v inom význame.

Poznamenajme, že existuje mnoho spôsobov definície základných pojmov teórie grafov, ktoré sa líšia stupňom všeobecnosti, použitými prostriedkami (množiny, zobrazenia, relácie atď.) a terminológiou. Tieto otázky sú nielen v československej, ale najmä vo svetovej literatúre ešte veľmi neustálené a je takmer pravidlom, že nová kniha o teórii grafov zavádza i novú terminológiu. My si vyberieme spôsob definície a terminológiu, ktoré sú dostatočne všeobecné, pritom však pomerne jednoduché a pre ďalší výklad ako i sledovanie inej literatúry vhodné. Pritom použijeme obvyklý jazyk a označovanie z teórie množín, ktoré považujeme v základných rysoch za známe, preto uvedieme z nich len stručný prehľad poznatkov, ktoré budeme najviac potrebovať.

Množinou nazývame súhrn nejakých objektov, ktoré nazývame prvkami tejto množiny. Okolnosť, že objekt a je prvkom množiny M, zapisujeme takto: $a \in M$. Znak $\emptyset$ označuje prázdnu množinu (t. j. množinu, ktorá nemá nijaký prvok). Predpokladáme, že čitateľ zhruba vie, čo je konečná a nekonečná množina (t. j. množina, ktorá má konečný, resp. nekonečný počet prvkov). Ak konečná množina má práve n prvkov (kde n je celé nezáporné číslo), nazývame ju n-prvková množina alebo množina s n prvkami. Ak je každý prvok množiny M prvkom množiny N, píšeme $M \subset N$ a hovoríme, že množina M je podmnožinou množiny N. Ak sa množiny M a N skladajú z tých istých prvkov (t. j. ak $M \subset N$ a $N \subset M$), píšeme $M = N$. Ak sa nejaká množina skladá z prvkov $a, b, c, \ldots$, označujeme ju znakom $\{a, b, c, \ldots\}$. Ak sú dané dva prvky a, b množiny M, môžeme z nich utvoriť usporiadanú dvojicu (a, b). Slovo „usporiadaná" tu znamená, že dvojicu (a, b) považujeme za rôznu od dvojice (b, a), pravda, okrem prípadu $a = b$, keď sa tieto dvojice, samozrejme, rovnajú. Analogicky budeme používať pojem a označenie usporiadanej trojice (a, b, c), usporiadanej štvorice (a, b, c, d) atď. Všeobecne, ak máme n prvkov nejakej množiny (kde n je prirodzené číslo), pričom prvky sú označené znakmi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (prvky nemusia byť navzájom rôzne!), môžeme z ich utvoriť usporiadanú n-ticu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, ktorej hovoríme tiež konečná postupnosť prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Popri usporiadaných dvojiciach budeme občas potrebovať aj neusporiadané dvojice alebo stručne len dvojice; sú charakterizované tým, že zmenou

poradia prvkov sa nezmenia: (neusporiadanú) dvojicu (a, b) považujeme vždy za rovnajúcu sa dvojici (b, a). V podobnom zmysle budeme hovoriť o (neusporiadaných) trojiciach, štvoriciach atď. Napr. štvorice čísel (1, 1, 2, 3), (1, 1, 3, 2), (1, 2, 1, 3) atď. považujeme za rovnaké.

Teraz sa môžeme vrátiť k abstraktnému popisu situácií, o ktorých sme hovorili na začiatku. Zrejme na ich určenie stačí vždy udať množinu V všetkých vrcholov, množinu H všetkých hrán a množinu I všetkých usporiadaných dvojíc (v, h), kde v je vrchol a h je hrana incidentná s vrcholom v. Celú matematickú štruktúru (graf) môžeme potom definovať ako usporiadanú trojicu týchto množín. Presná definícia grafu vyzerá teda takto:

Grafom nazývame usporiadanú trojicu $G = (V, H, I)$, kde V, H a I sú množiny spĺňajúce nasledujúce dve podmienky:

(1) každý prvok množiny I je usporiadanou dvojicou tvaru (v, h), kde $v \in V$ a $h \in H$;

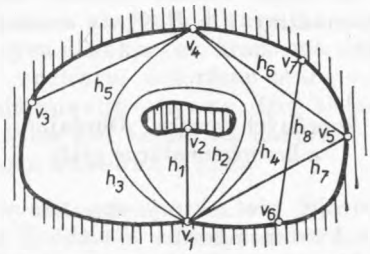
(2) pre každé $h \in H$ existuje práve jeden, alebo práve dva prvky $v \in V$ také, že $(v, h) \in I$.

Prvá možnosť v podmienke (2) zodpovedá situácii, keď hrana h spája vrchol sám so sebou; druhá situácii, keď h spája dva rôzne vrcholy.

Množinu V nazývame vrcholovou množinou grafu G. Jej prvky nazývame vrcholy grafu G. Podobne množinu H nazývame hranovou množinou grafu G a jej prvky — hrany grafu G. Pre vrcholy a hrany grafu G niekedy používame tiež spoločný názov prvky grafu G. Množinu I budeme nazývať incidenciou alebo reláciou incidencie grafu G.

Z dôvodov všeobecnosti budeme pripúšťať aj prípad, že graf nemá žiadne prvky, t. j. $V = H = I = \emptyset$. V tomto prípade graf $G = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ nazývame prázdny graf. Všetky ostatné grafy nazývame neprázdne grafy.

Príklad 1. Na brehu jazera (*obr. 1*) je umiestených 7 prístavov v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 (z toho jeden na ostrove). Prístavy sú pospájané dopravnými linkami h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, po ktorých premávajú parníky (napr. linka h_2 predstavuje vyhliadkovú plavbu okolo ostrova, ktorá



Obr. 1. Dopravné linky parníkov na jazere

začína i končí v prístave v_1). Uvedenú situáciu môžeme popísať grafom $G = (V, H, I)$, pričom

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\};$$

$$H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\};$$

$$I = \{(v_1, h_1), (v_1, h_2), (v_1, h_3), (v_1, h_4), (v_1, h_7),$$
$$(v_2, h_1), (v_3, h_5), (v_4, h_3), (v_4, h_4), (v_4, h_5), (v_4, h_6),$$
$$(v_5, h_6), (v_5, h_7), (v_6, h_8), (v_7, h_8)\}.$$

Vidíme, že graf G má 7 vrcholov a 8 hrán. Jeho incidencia sa skladá z 15 prvkov (dvojíc). Hrana h_2 sa vyskytuje v jedinej dvojici. Ostatné hrany sa vyskytujú v dvoch dvojiciach, lebo sú incidentné s dvoma rôznymi vrcholmi.

Cvičenie 1. Na medzinárodnej porade sa zúčastnili: Angličan (A), Francúz (F), Kanaďan (K), Nemec (N) a Švajčiar ($Š$). Kanaďan rozpráva po anglicky a francúzsky, Švajčiar po francúzsky a nemecky. Aby sa dohovorili aj ostatní, boli niektorým dvojiciam pridelení tlmočníci: tlmočník t_1 pre A a N, tlmočník t_2 pre A a $Š$, tlmočník t_3 pre A a F, tlmočník t_4 pre F a N a tlmočník t_5 pre K a N. Je možné pomocou grafu prehľadne popísať, ktorí tlmočníci sú pridelení jednotlivým dvojiciam? Ak áno, zostrojte tento graf!

Cvičenie 2. Vyšetrite, či je usporiadaná trojica $G = (V, H, I)$ grafom, ak

a) $V = \{1, 2\}$, $H = \{3, 4\}$, $I = \{(1, 4), (2, 3), (3, 1), (4, 2)\}$;
b) $V = \{1, 2\}$, $H = \{3, 4\}$, $I = \{(1, 3), (2, 3)\}$;
c) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $H = I = \emptyset$ (prázdna množina).

Cvičenie 3. Zvoľme si pevne rovinu R. Nech je V množinou všetkých bodov roviny R, a nech H je množinou všetkých priamok roviny R. Označme znakom I množinu všetkých usporiadaných dvojíc (v, h) takých, že $v \in V$, $h \in H$ a bod v leží na priamke h. Je usporiadaná trojica $G = (V, H, I)$ grafom?

Cvičenie 4. Dané sú množiny V a H. Kedy existuje množina I taká, že $G = (V, H, I)$ je graf?

2. Diagramy konečných grafov. Obyčajné, kompletné a komplementárne grafy

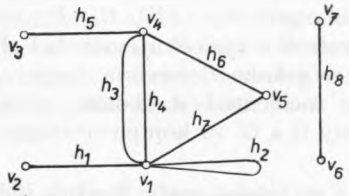
Ľahko možno zostrojiť graf, ktorý má nekonečný počet prvkov, t. j. graf (V, H, I), v ktorom množina V alebo H je nekonečná. Takéto grafy nazývame nekonečné. Príkladom nekonečného grafu je graf

(V, H, I), v ktorom V je ľubovoľná nekonečná množina (napr. množina všetkých prirodzených čísel $\{1, 2, 3, \ldots\}$) a $H = I = \emptyset$.

Cvičenie 5. Vyšetrite, či existujú grafy (V, H, I), v ktorých z množín V, H a I sú nekonečné: a) všetky; b) len V a H; c) len V a I; d) len H a I; e) len V; *f*) len H; g) len I. h) Čo možno vo všeobecnosti povedať o konečnosti množín H a I?

My sa budeme zaoberať najmä konečnými grafmi, t. j. grafmi, ktoré majú konečný počet prvkov (vrcholov i hrán). Takéto grafy býva často výhodné znázorniť v rovine pomocou tzv. diagramov. V diagrame grafu vrcholom zodpovedajú body roviny, ktoré obyčajne zvýrazňujeme krúžkami. Hrany grafu sú znázornené pomocou čiar, ktoré spájajú príslušné body. Okrem toho, ak je to potrebné, označíme body symbolmi príslušných vrcholov a čiary symbolmi príslušných hrán. Napr. ak si na *obr. 1* odmyslíme ostrov a brehy jazera, dostávame diagram grafu z príkladu 1.

Pri konštrukcii diagramu daného grafu záleží predovšetkým na tom, aké body sú čiarami spojené; umiestnenie bodov, dĺžka i tvar čiar sú nepodstatné. Teda graf z príkladu 1 by sme mohli znázorniť diagramom aj tak ako na *obr. 2*. Vidíme, že jednému grafu môže zodpovedať veľa rôznych diagramov. Pri konštrukcii diagramu daného grafu sa snažíme, aby diagram bol čo najprehľadnejší.



Obr. 2. Diagram grafu z príkladu 1

Cvičenie 6. Nakreslite diagram grafu z cvičenia 1.

Pomocou incidencie môžeme zaviesť ďalšie užitočné pojmy: vrcholy incidentné s hranou h sa nazývajú konce hrany h; hrana, ktorá má jediný koniec, sa nazýva slučka; ak hrana má dva rôzne konce, tieto sa nazývajú susedné vrcholy; dve rôzne hrany incidentné s tým istým vrcholom sa nazývajú susedné hrany. Dve alebo viac susedných hrán, z ktorých každá má tie isté konce, sa nazývajú rovnobežné hrany; každú z nich nazývame násobná hrana.

Príklad 2. V grafe znázornenom na *obr. 2* sú v_1 a v_2 konce hrany h_1; v_1 a v_2 sú susedné vrcholy; h_1 a h_7 sú susedné hrany; h_3 a h_4 sú násobné hrany; h_2 je slučka.

V mnohých úvahách sa možno obmedziť na skúmanie grafov, ktoré neobsahujú slučky ani násobné hrany. My budeme takéto grafy nazývať obyčajné. Hodno poznamenať, že niektorí autori rozumejú pod slovom „graf" náš obyčajný graf (prípadne len konečný obyčajný graf); ak chcú vyšetrovať grafy s násobnými hranami, prípadne i so slučkami, používajú názvy „multigraf", „pseudograf" a pod. Keďže takáto terminológia má isté nevýhody (napr. pri tvorení názvov typu „podmultigraf" a pod.), nebudeme ju používať.

Obyčajný graf nazývame kompletný (úplný), ak sú ľubovoľné dva jeho rôzne vrcholy susedné. Diagramy kompletných grafov s 1 až 5 vrcholmi sú na *obr. 3* [2]).

Obr. 3. Kompletné grafy s 1 až 5 vrcholmi

Dva obyčajné grafy G a G' nazývame komplementárne (doplnkové), ak majú tú istú vrcholovú množinu a ak dva rôzne vrcholy sú susedné v G' práve vtedy, keď nie sú susedné v G.

Príklad 3. Definujme graf $G' = (V', H', I')$ takto: Vrcholy grafu G' budú tie isté ako v grafe G z výsledku cvičenia 1. Hranami grafu G' budú dvojice osôb, ktoré sa priamo dohovoria (napr. Angličan a Kanaďan). Každá dvojica bude incidentná s oboma osobami, ktoré ju tvoria. Ľahko sa zistí, že grafy G a G' sú komplementárne.

3. Stupne vrcholov a pravidelné grafy. Použitie indukcie v teórii grafov

Dôležitú informáciu o vrchole grafu nám podáva jeho stupeň, t. j. počet hrán, ktoré „z tohoto vrcholu vychádzajú", čiže ktoré sú s vrcholom incidentné; pritom slučku počítame za dve hrany. Stupeň vrcholu v v grafe G budeme označovať $s_G(v)$ alebo stručne $s(v)$. Ak je vrchol v v grafe G incidentný s nekonečným počtom hrán, symbol $s_G(v)$ nedefinujeme, len hovoríme, že v má v G nekonečný stupeň.

Príklad 4. V grafe znázornenom na *obr. 2* platí: $s(v_1) = 6$, $s(v_2) = s(v_3) = s(v_6) = s(v_7) = 1$, $s(v_4) = 4$, $s(v_5) = 2$.

Cvičenie 7. Pre ktoré prirodzené čísla n existuje graf s n vrcholmi, z ktorých jeden má stupeň 4 a všetky ostatné majú stupeň 2 ?

---

2) Výraz „graf s n vrcholmi" (resp. „graf s m hranami") znamená graf, ktorý má práve n vrcholov (resp. práve m hrán).

Cvičenie 8. Dokážte, že neexistuje graf s 5 vrcholmi, ktoré všetky majú stupeň 3.

Napriek predošlému cvičeniu sa môže stať, že všetky vrcholy grafu G majú ten istý (konečný) stupeň n. V tom prípade G nazývame pravidelným grafom stupňa n.

Príklad 5. Pre každé prirodzené číslo n platí: Kompletný graf s n vrcholmi je pravidelným grafom stupňa $n - 1$ (skontrolujte si to pre $n = 1$ až 5 na *obr. 3*!). Z toho ďalej vidíme, že existujú pravidelné grafy ľubovoľného stupňa.

Cvičenie 9. Popíšte všetky pravidelné grafy stupňa a) 0; b) 1.

Poznámka. Naše ďalšie výsledky budeme vyjadrovať v dvoch druhoch viet: v teorémach a lemách. Teoréma, čiže hlavná veta, bude obsahovať výsledky, ktoré sú pre nás najzaujímavejšie — akési ciele jednotlivých etáp našej prechádzky po tejto matematickej disciplíne. Naproti tomu lema, čiže pomocná veta, môže byť síce sama osebe tiež zaujímavá, ale z nášho hľadiska bude mať len pomocný význam ako nástroj na dokázanie ďalších teorém alebo riešenie cvičení a príkladov. Výsledky, ktoré ľahko vyplývajú z teorém a lem, budeme nazývať ich dôsledkami.

Pri dôkaze niektorých teorém a lem budeme používať metódu indukcie (nazývanej často „úplná indukcia" alebo „matematická indukcia"). Keďže indukciu budeme potrebovať trocha v inom tvare než sa obyčajne používa, uvedieme jej princíp vo forme nasledujúcej lemy 1. Čitateľ, pre ktorého je jej formulácia príliš abstraktná, nech si pod výrokom V_n predstavuje napríklad výrok

$$0 \,.\, 1 + 1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + 3 \,.\, 4 + \ldots + n \,.\, (n + 1) = n \frac{(n + 1)(n + 2)}{3}$$

(a nech si tento výrok pomocou indukcie dokáže!).

Lema 1. (Princíp indukcie.) Predpokladajme, že každému celému číslu $n \geqq 0$ je priradený výrok V_n, pričom

1° výrok V_0 platí;

2° pre každé celé $k > 0$ z platnosti všetkých výrokov V_n pre $0 \leqq n < k$ vyplýva platnosť výroku V_k.

Potom výrok V_n platí pre všetky celé $n \geqq 0$.

Dôkaz. Pripusťme, že predpoklady lemy sú splnené, ale výrok V_n neplatí pre niektoré celé $n \geqq 0$. Nech je k najmenšie z čísel n tejto vlastnosti. Zrejme $k \geqq 0$. Ak $k = 0$, odporuje to predpokladu 1°; ak $k > 0$, odporuje to predpokladu 2°. V obidvoch prípadoch dostávame spor, čo dokazuje lemu.

Poznámky.

1. Dôkaz lemy 1 je založený na tom, že každá neprázdna množina celých nezáporných čísel má najmenšie číslo. Toto tvrdenie sa niekedy považuje za axiómu (základnú vlastnosť, ktorú už nedokazujeme). Inokedy sa zasa táto vlastnosť dokazuje pomocou axiómy, ktorá požaduje platnosť princípu indukcie. Bližší rozbor týchto otázok sa vymyká z rámca našej témy.

2. Lema 1 a jej dôkaz ostanú v platnosti, ak číslo 0 všade nahradíme číslom 1 alebo ľubovoľným iným celým číslom c (sú prípady, keď potrebujeme použiť princíp indukcie pre $c = 2$ alebo $c = 3$).

3. Keďže v leme 1 sa mení číslo n, hovoríme, že používame indukciu „vzhľadom na n".

4. Pri aplikácii princípu indukcie overujeme podmienky 1° a 2°; overovaniu týchto podmienok hovoríme prvý a druhý krok indukcie.

Lema 2. Nech je n celé nezáporné číslo. Potom platí: Každá n-prvková množina má práve 2^n podmnožín.

Dôkaz. Ak označíme výrok, ktorý máme dokázať pre každé celé nezáporné číslo n, znakom V_n, môžeme použiť indukciu vzhľadom na n.

1° (Prvý krok indukcie.) Výrok V_0 platí, lebo 0-prvková, t. j. prázdna množina, má jedinú podmnožinu, totiž opäť prázdnu množinu a platí $2^0 = 1$.

2° (Druhý krok indukcie.) Nech je k pevne zvolené prirodzené (t. j. celé kladné) číslo. Nech platí výrok V_n pre všetky celé n z intervalu $0 \leqq n < k$ (tzv. indukčný predpoklad). Nech je M ľubovoľná k-prvková množina. Potrebujeme dokázať, že M má práve 2^k podmnožín. Za tým účelom vynechajme z množiny M jeden jej prvok m (to môžeme, lebo k je kladné). Dostaneme istú množinu M' s $k - 1$ prvkami. Zrejme všetky podmnožiny A množiny M sa dajú rozdeliť do dvoch skupín: buď A neobsahuje prvok m, a teda A je podmnožinou množiny M' (takýchto podmnožín je podľa indukčného predpokladu 2^{k-1}; indukčný predpoklad môžeme použiť, lebo $0 \leqq k - 1 < k$), alebo A obsahuje prvok m, a preto A možno získať z podmnožiny množiny M' pridaním prvku m (takýchto podmnožín A je práve toľko, koľko je podmnožín množiny M', teda opäť 2^{k-1}). Spolu M má $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$ podmnožín.

Podľa princípu indukcie (lema 1) výrok V_n platí pre všetky celé nezáporné čísla n. Lema 2 je dokázaná.

Teoréma 1. V každom konečnom grafe súčet stupňov všetkých vrcholov sa rovná dvojnásobku počtu hrán.

Dôkaz urobíme indukciou vzhľadom na počet hrán grafu.

1° Teoréma zrejme platí pre všetky grafy s 0 hranami, lebo v tomto prípade aj všetky stupne vrcholov sa rovnajú nule.

2° Predpokladajme, že tvrdenie teorémy platí pre všetky grafy s menej než m hranami, kde m je dané prirodzené číslo. Dokážeme, že toto tvrdenie potom platí aj pre všetky grafy s m hranami. Nech G je jeden takýto graf s m hranami. Označme počet jeho vrcholov znakom n a tieto vrcholy znakmi $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Zvoľme ľubovoľnú hranu h a vynechajme ju z grafu G. Dostaneme nejaký graf G' s n vrcholmi a $m - 1$ hranami. Položme $s_i = s_G(v_i)$ a $s_i' = s_{G'}(v_i)$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, t. j. označme stupne vrcholov grafu G znakmi $s_1, s_2, \ldots, s_n$ a grafu G' znakmi $s_1', s_2', \ldots, s_n'$. Podľa indukčného predpokladu platí:

$$s_1' + s_2' + \ldots + s_n' = 2(m - 1).$$

Rozoznávajme dva prípady:

I. h je slučka. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že hrana h je incidentná s vrcholom v_1. Potom zrejme platí

$$\begin{aligned} s_1' &= s_1 - 2, \\ s_2' &= s_2, \\ &\vdots \\ s_n' &= s_n, \end{aligned}$$

takže

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = s_1' + 2 + s_2' + \ldots + s_n' = 2(m - 1) + 2 = 2m.$$

II. h má dva rôzne konce. Nech sú to napr. vrcholy v_1 a v_2. Potom platí

$$\begin{aligned} s_1' &= s_1 - 1, \\ s_2' &= s_2 - 1, \\ s_3' &= s_3, \\ &\vdots \\ s_n' &= s_n, \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n &= s_1' + 1 + s_2' + 1 + s_3' + \ldots + s_n' = \\ &= 2(m - 1) + 2 = 2m. \end{aligned}$$

Teoréma je dokázaná.

Príklad 6. Súčet stupňov všetkých vrcholov grafu z príkladu 1 (*obr. 2*) je $6 + 1 + 1 + 4 + 2 + 1 + 1 = 16$, teda párny. Súčty stupňov všetkých vrcholov kompletných grafov z *obr. 3* sú 0, 2, 6, 12 a 20.

Cvičenie 10. Vyslovte teorému 1 pre špeciálny prípad pravidelných grafov!

Dôsledok 1. V každom konečnom grafe súčet stupňov všetkých vrcholov je párny.

Dôkaz vyplýva priamo z teorémy 1.

Dôsledok 2. Každý konečný graf má párny počet vrcholov nepárneho stupňa.

Dôkaz. Keby konečný graf G mal nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa, bol by súčet stupňov všetkých vrcholov grafu G nepárny, čo odporuje dôsledku *1* teorémy 1.

Dôsledok 3. Každý konečný pravidelný graf nepárneho stupňa má párny počet vrcholov.

Dôkaz vyplýva z predošlého dôsledku 2.

Teoréma 2. Nech je dané prirodzené číslo n a celé nezáporné čísla $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Graf s n vrcholmi, ktorých stupne sú $s_1, s_2, \ldots, s_n$ existuje práve vtedy, keď $s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ je párne číslo.

Dôkaz. Nutná podmienka vyplýva z dôsledku 1 teorémy 1. Aby sme dokázali, že uvedená podmienka je aj postačujúca, nech sú dané celé nezáporné čísla $s_1, s_2, \ldots, s_n$, kde n je prirodzené číslo, pričom $s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ je párne číslo. Tvrdenie dokážeme indukciou vzhľadom na číslo

$$m = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{2}.$$

Ak $m = 0$, tak zrejme $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 0$ a požadovaný graf existuje — stačí použiť ľubovoľný graf s n vrcholmi, ktorý nemá žiadne hrany.

Teraz predpokladajme, že je dané prirodzené číslo m a graf s n vrcholmi, ktoré majú predpísané stupne $s_1', s_2', \ldots, s_n'$ existuje vždy, keď $s_1', s_2' + \ldots + s_n'$ je párne číslo a

$$\frac{s_1' + s_2' + \ldots + s_n'}{2} < m.$$

Dokážeme, že graf s n vrcholmi, ktoré majú predpísané stupne $s_1, s_2, \ldots, s_n$, možno zostrojiť aj vtedy, keď

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{2} = m.$$

Keďže m je prirodzené číslo, $s_1 + s_2 + \ldots + s_n \geqq 2$. Rozoznávajme dva prípady:

I. Aspoň dve z čísel $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sú kladné. Nech napr. $s_1 \geqq 1$, $s_2 \geqq 1$. Položme $s_1' = s_1 - 1$, $s_2' = s_2 - 1$, $s_3' = s_3, \ldots, s_n' = s_n$. Zrejme

$$\frac{s_1' + s_2' + \ldots + s_n'}{2} = m - 1.$$

Podľa indukčného predpokladu existuje graf G' s n vrcholmi, ktorých stupne v G' sú $s_1', s_2', \ldots, s_n'$. Označme tieto vrcholy znakmi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a spojme vrcholy v_1 a v_2 novou hranou. Vznikne istý graf G s n vrcholmi a m hranami. Zrejme stupne vrcholov v grafe G budú $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

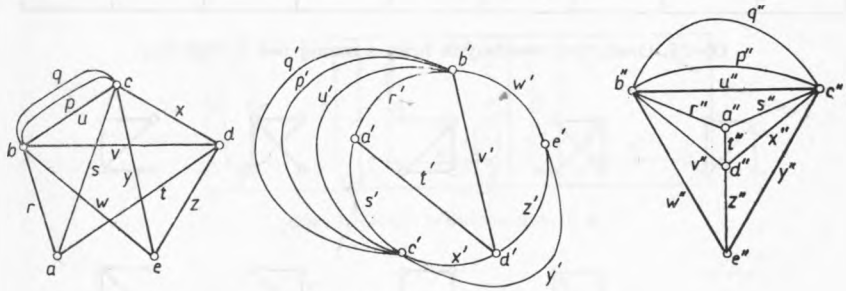
II. Len jediné z čísel $s_1, s_2, \ldots, s_n$ je kladné. Nech je to napr. s_1. Potom musí byť $s_1 \geqq 2$. Položme $s_1' = s_1 - 2$, $s_2' = s_2, \ldots, s_n' = s_n$. Ďalší postup je ten istý ako v predošlom prípade — len pridanou hranou bude slučka vo vrchole v_1.

Teoréma je dokázaná.

Cvičenie 11. Dané sú celé nezáporné čísla n a s. Kedy existuje pravidelný graf stupňa s, ktorý má práve n vrcholov?

4. Podgrafy a izomorfizmy grafov

Všimnime si grafy znázornené na *obr. 4.* Hoci na prvý pohľad sú ich diagramy rozdielne, po podrobnejšom štúdiu zistíme, že sa vlastne líšia iba označením prvkov, umiestnením bodov predstavujúcich vrcholy



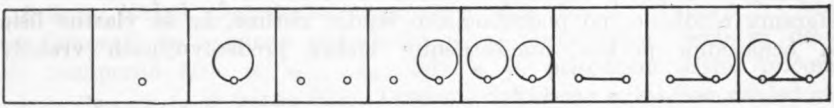
Obr. 4. Izomorfné grafy

a tvarom čiar ich spojujúcich. Napr. v grafe G sú spojené ľubovoľné dva vrcholy práve jednou hranou okrem dvojice nesusedných vrcholov (a, e) a okrem dvojice vrcholov (b, c) spojených troma hranami. V grafe G' platí to isté o dvojici (a', e') a (b', c'), v grafe G'' o dvojiciach (a'', e'') a (b'', c''). V grafe G má hrana r konce a a b, v grafe G' má hrana r' konce a' a b', v grafe G'' má hrana r'' konce a'' a b''. Keď si zvolíme inú hranu, zistíme podobnú závislosť. Vidíme, že korešpondencia $a \leftrightarrow a' \leftrightarrow a''$, $b \leftrightarrow b' \leftrightarrow b''$ atď. medzi vrcholmi grafov G, G' a G'' a korešpondencia $r \leftrightarrow r' \leftrightarrow r''$, $s \leftrightarrow s' \leftrightarrow s''$ atď. medzi hranami týchto grafov má tú vlastnosť, že zodpovedajúce si hrany spojujú zodpovedajúce si vrcholy. Hovoríme, že grafy G, G' a G'' sú navzájom izomorfné. Presnejšie, hovoríme, že grafy $G = (V, H, I)$ a $G' = (V', H', I')$ sú izomorfné, keď vrcholy (resp.

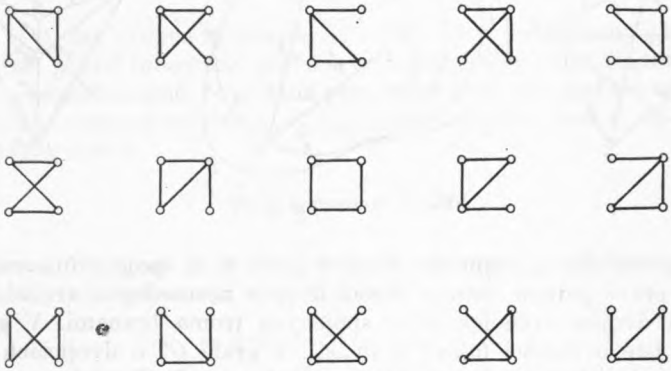
hrany) grafu G možno vzájomne jednoznačne priradiť vrcholom (resp. hranám) grafu G' tak, aby vrchol v a hrana h grafu G boli incidentné v G práve vtedy, keď zodpovedajúci vrchol v' a hrana h' grafu G' sú incidentné v G'. Príslušné priradenie medzi prvkami (t. j. vrcholmi a hranami) grafov G a G' nazývame izomorfizmus grafov G a G'.

Význam pojmu izomorfizmus spočíva v tom, že izomorfné grafy majú mnoho spoločných vlastností; napr. ak sú konečné, možno ich znázorniť diagramami „rovnakého tvaru". Preto často nie je potrebné medzi izomorfnými grafmi rozlišovať a z istého hľadiska ich možno považovať za „rovnaké".

Príklad 7. Ľahko zistíme, že každý graf bez násobných hrán s menej než troma vrcholmi je izomorfný niektorému z 9 grafov, ktorých diagramy sú na *obr. 5* (prvý z nich je prázdny graf!).



Obr. 5. Grafy bez násobných hrán s menej než 3 vrcholmi



Obr. 6. Grafy so 4 vrcholmi a 4 hranami

Cvičenie 12. Na *obr. 6* je znázornených 15 grafov. Koľko je medzi nimi neizomorfných?

Cvičenie 13. Dokážte, že ak sú dva (konečné) grafy izomorfné, tak majú a) rovnaký počet vrcholov; b) rovnaký počet hrán; c) rovnaké stupne vrcholov. Platí aj obrátené tvrdenie?

Cvičenie 14. Koľko existuje neizomorfných obyčajných grafov s menej než 5 vrcholmi? Zostrojte ich diagramy!

Často sa stretávame s prípadom, že je daný graf s „veľkým" počtom vrcholov a hrán, ale pre nejaké účely stačí nám všímať si len niektoré z nich, teda skúmať akési „časti" grafu, tzv. podgrafy. Presnejšie, hovoríme, že graf $G' = (V', H', I')$ je podgrafom grafu $G = (V, H, I)$, ak platí:

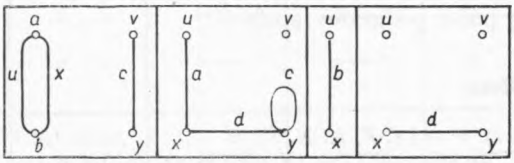
(3) $V' \subset V$, $H' \subset H$, $I' \subset I$;

(4) ak vrchol v je koncom hrany h v grafe G a hrana h patrí do grafu G', tak aj vrchol v patrí do G' a je koncom hrany h v G'.

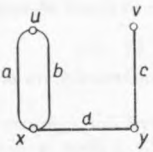
Zrejme prázdny graf je podgrafom každého grafu.

Cvičenie 15. Ktoré zo 4 grafov znázornených na *obr. 7* sú podgrafmi grafu z *obr. 8*?

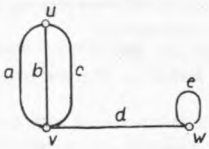
Cvičenie 16. Koľko má graf z *obr. 9* a) podgrafov; b) neizomorfných podgrafov? (Návod: Spočítajte najprv a) podgrafy; b) neizomorfné podgrafy s 0, 1, 2 a 3 vrcholmi.)



Obr. 7. Grafy k cvičeniam 15 a 17



Obr. 8. Graf z cvičení 15 a 17



Obr. 9. Graf k cvičeniam 16 a 18

Medzi podgrafmi sa vyskytujú dva ich význačné druhy: faktory a indukované podgrafy. Faktorom grafu G nazývame každý jeho podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy grafu G. Indukovaným podgrafom grafu G nazývame každý podgraf G' grafu G, ktorý obsahuje všetky hrany grafu G, ktorých oba konce patria do G'. Ak vrcholovú množinu grafu G' označíme znakom V', môžeme tiež povedať, že G' je podgraf grafu G indukovaný množinou V'.

Príklad 8. Uvažujme graf, ktorého vrcholmi sú železničné uzly v Československu a ktorého hranami sú železničné trate spojujúce tieto uzly. Ide teda o sieť železničných spojov, ktorej mapa sa nachádza v cestovnom poriadku ČSD; táto mapa je v podstate diagramom nášho grafu. Podgrafom tohto grafu je napríklad časť tejto siete, ktorú berieme do úvahy pri hľadaní spojov z Prahy do Košíc. Indukovaným podgrafom je sieť všetkých železničných tratí na Slovensku. Faktorom tohto grafu je sieť všetkých tratí v Československu, po ktorých chodia rýchliky (pričom ponecháme všetky železničné uzly, aj keď cez ne žiadne rýchliky nechodia).

Cvičenie 17. Ktoré zo 4 grafov znázornených na *obr. 7* sú a) faktormi, b) indukovanými podgrafmi grafu z *obr. 8*?

Cvičenie 18. Koľko má graf z *obr. 9* a) faktorov; b) indukovaných podgrafov? (Návod: a) Spočítajte postupne všetky faktory s 0, 1, 2, 3, 4 a 5 hranami; b) spočítajte všetky indukované podgrafy s 0, 1, 2 a 3 vrcholmi.)

Cvičenie 19. Dokážte, že konečný graf G s n vrcholmi a m hranami má práve 2^m faktorov a 2^n indukovaných podgrafov! Možno pomocou čísel m a n vyjadriť aj počet podgrafov grafu G?

Výsledky cvičení

1. $G = (V, H, I)$, $V = \{A, F, K, N, Š\}$, $H = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, $I = \{(A, t_1), (A, t_2), (A, t_3), (F, t_3), (F, t_4), (K, t_5), (N, t_1), (N, t_4), (N, t_5), (Š, t_2)\}$.

2. a) Nie — neplatí (1). b) Nie — neplatí (2). c) Áno.

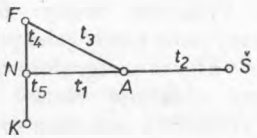
3. Nie — neplatí (2).

4. Vždy, okrem prípadu $V = \emptyset$, $H \neq \emptyset$.

5. a) Áno. b) Nie. c) Nie. d) Áno. e) Áno. f) Nie. g) Nie. h) H a I sú buď obe konečné, alebo obe nekonečné.

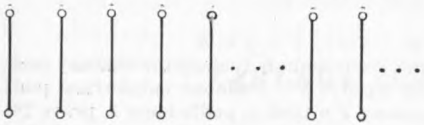
6. Pozri *obr. 10.*

7. Pre každé n. Diagram jedného takéhoto grafu je načrtnutý na *obr. 11.*

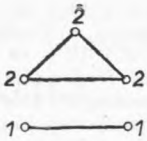


Obr. 10. Výsledok cvičenia 6

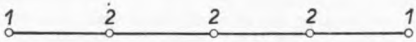
Obr. 11. Výsledok cvičenia 7



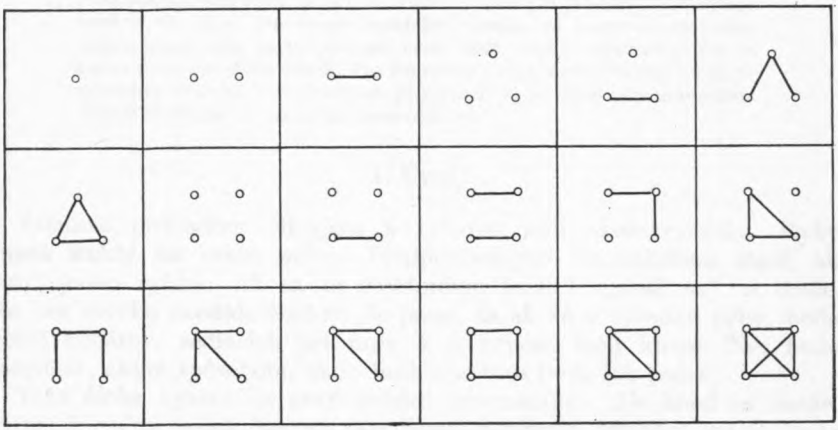
Obr. 12. Pravidelný graf stupňa 1



Obr. 13. Prvý graf k výsledku cvičenia 13



Obr. 14. Druhý graf k výsledku cvičenia 13



Obr. 15. Obyčajné grafy s menej než 5 vrcholmi

8. Súčet stupňov má byť 15. Avšak každá hrana má dva konce (rôzne alebo totožné) a prispieva teda k súčtu stupňov číslom 2. Preto súčet stupňov nemôže byť nepárnym číslom 15. (Vyplýva to aj z teorém 1 a 2 a ich dôsledkov.)

9. a) Nemajú žiadne hrany. b) Vrcholy sa dajú rozdeliť do dvojíc spojených (jedinou) hranou. Iné hrany už v grafe nie sú. Schematicky je táto situácia znázornená na *obr. 12.*

10. V konečnom pravidelnom grafe stupňa s, ktorý má práve n vrcholov a m hrán, platí: $ns = 2m$.

11. Práve vtedy, keď aspoň jedno z čísel n a s je párne.

12. Práve dva.

13. Dané tvrdenie vyplýva z definície izomorfných grafov. Obrátené tvrdenie neplatí; napr. grafy z *obr. 13* a *14* spĺňajú predpoklady a), b) i c), ale zrejme nie sú izomorfné (čísla na obrázkoch znamenajú stupne vrcholov).

14. Práve 19. Je to prázdny graf a grafy znázornené na *obr. 15.*

15. Posledné dva.

16. a) $1 + 4 + 14 + 32 = 51$. b) $1 + 2 + 6 + 15 = 24$.

17. a) Posledný. b) Žiaden.

18. a) $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$. b) $1 + 3 + 3 + 1 = 8$.

19. Faktory grafu $G = (V, H, I)$ zrejme zodpovedajú (jednojednoznačne) podmnožinám množiny H, ktorých je podľa lemy 2 práve 2^m. Podobne indukované podgrafy grafu G zodpovedajú podmnožinám množiny V a tých je podľa lemy 2 práve 2^n. Počet podgrafov takto vyjadriť nemožno. Napr. každý z troch grafov so 4 vrcholmi a 3 hranami znázornených na *obr. 15* má iný počet podgrafov (36, 34 a 35).