K DEFINÍCII POJMU NEKONEČNÉHO RADU A DIVERGENCII HARMONICKÉHO RADU

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

1

V dnešných stredoškolských učebniciach matematiky sa pojem nekonečného radu (v ďalšom stručne aj radu) zavádza takto:

Nekonečným radom nazývame symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alebo $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, alebo $a_1 + a_2 + \ldots$. Súčty $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nazývame jeho čiastočnými súčtami. Ak existuje $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, nazývame rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentným, číslo s nazývame jeho súčtom a píšeme $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nekonečný rad, ktorý nie je konvergentný, nazýva sa divergentný (pozri [1], str. 38—40; [2] str. 168).

Tento spôsob zavedenia pojmu radu je v súlade s učebnicami matematickej analýzy, ktoré sa u nás používajú (pozri napr. [3], str. 129).

No už v monografii [4] je naznačené (pozri str. 100), že rad možno chápať ako špeciálny prípad postupnosti. To umožňuje dať skutočnú definíciu radu bez neurčitého pojmu „symbol", definíciu, ktorá v konečnom dôsledku prevádza pojem radu na pojem množiny. To bude iste v súlade s modernizačnými snahami vo vyučovaní matematiky na našich stredných školách. Preto zdá sa účelným definovať pojem radu takto:

Definícia. Nech $a_n (n = 1, 2, \ldots)$ sú čísla. Nekonečným radom (stručne radom)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

(alebo $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$) nazývame postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Čísla a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ nazývame členmi radu (1).

Poznámka. V zmysle predošlej definície teda rad (1) s členmi a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ je totožný s postupnosťou $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej členy sú $\sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Obrátene, postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je totožná s radom $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$, ak kladieme $a_0 = 0$. Teda postupnosť s členmi a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ je totožná s radom, ktorého členy sú $a_n - a_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, pričom $a_0 = 0$.

Prijatie uvedenej definície má isté dôsledky pre formuláciu niektorých vlastností radov. Tak napr. netreba osobitne definovať, čo značí konvergencia radu (značí to isté, čo konvergencia postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$). Zostáva definícia súčtu radu $s = \lim_{n \to \infty} s_n$, samozrejme, len v prípade jeho konvergencie a možno ponechať aj pojem čiastočného súčtu radu. Namiesto „rad s ohraničenou postupnosťou čiastočných súčtov" bude treba hovoriť o ohraničenom rade a pod.

Poznámka. Aj pri práve zavedenej definícii radu budeme symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (i ďalšie) používať nielen na označenie radu, ale ešte častejšie na označenie jeho súčtu.

Divergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

prevrátených hodnôt všetkých prirodzených čísel (tzv. harmonického radu) možno dokázať rozmanitými spôsobmi. Pre strednú školu je spomedzi doterajších spôsobov asi najvhodnejšia metóda založená na použití nerovnosti

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2},$$

ktorej platnosť (pre každé prirodzené číslo n) možno ľahko overiť matematickou indukciou.

Zdá sa dôležitým vedieť dokázať divergenciu harmonického radu, a to jednak preto, že ide o rad, ktorý spĺňuje nutnú podmienku konvergencie $(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0)$ a jednak preto, že ide o rad „vytvorený" prirodzeným spôsobom z množiny všetkých prirodzených čísel.

V ďalšom podáme dva dôkazy divergencie harmonického radu, ktoré podľa autorových vedomostí neboli doteraz známe v matematickej literatúre.

Najprv si povieme niečo o predbežných vedomostiach potrebných na pochopenie dôkazov. Ide o jednoduché poznatky z teórie nekonečných radov. Tieto poznatky sú zhrnuté v nasledujúcich troch poučkách.

(**A**) a) Nech $0 \leqq a_n \leqq b_n$ (n = 1, 2, ...), nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Potom konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

b) Nech okrem predpokladov v a) platí nasledujúce: Existuje také prirodzené číslo m, že $a_m < b_m$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(**B**) Ak konverguje rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

tak konverguje aj rad

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + \ldots$$

a má rovnaký súčet ako pôvodný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(**C**) Ak konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a d je číslo, tak konvergujú aj rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} d a_n$$

a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} d a_n = d \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Pristúpime k spomínaným novým dôkazom divergencie harmonického radu.

Dôkaz I. Nepriamo. Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konverguje a nech $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Keďže $\frac{1}{2k-1} \leqq \frac{1}{k}$, $\frac{1}{2k} \leqq \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, na základe (**A**) každý z radov $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k}$ konverguje. Položme $s_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$, $s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$.

Z (**A**) b) vyplýva

$$s_1 > s_2. \tag{2}$$

Ďalej na základe (**B**), (**C**) platí

$$s = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) + \ldots = s_1 + s_2,$$
$$s_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} s. \tag{3}$$

Potom z (2), (3) dostávame $s = s_1 + s_2 > 2s_2 = s$, teda $s > s$. Dospeli sme k sporu.

Dôkaz II. Nepriamo. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konverguje. V dôkaze I sme videli, že konverguje aj rad $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$. Nech s, s_2 majú rovnaký význam ako v dôkaze I. Na základe (**C**) konverguje rad $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \frac{1}{2k}$ a má súčet $-s$. Ďalej konverguje rad

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}\right) + \ldots$$

a má súčet s. No potom na základe (**B**) konverguje aj rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} - 2\,\frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \ldots$$

a má súčet $s - s = 0$. No všetky členy tohto radu sú kladné čísla, a tak na základe (**A**) b) jeho súčet musí byť kladný. Dospeli sme k sporu.

Vnímavý čitateľ iste postrehol, že postupmi uplatnenými v predošlých dôkazoch možno dokázať túto všeobecnejšiu vetu.

Veta. Nech $a_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq a_{n+1} \geqq \ldots$, nech existuje také prirodzené číslo l, že $a_{2l-1} > a_{2l}$. Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Ak v predošlej vete volíme $a_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tak vzhľadom na to, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

vyplýva z uvedenej vety divergencia harmonického radu

LITERATÚRA

[1] Matematika pre 3. ročník stredných všeobecnovzdelávacích škôl. SPN, Bratislava 1965.
[2] Riečan—Franek—Červenková: Úlohy z matematiky pre 3. ročník gymnázia, SPN, Bratislava 1972.
[3] Jarník, V.: Diferenciální počet I. NČSAV, Praha 1955.
[4] Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 1931.