Rubriku vedie Štefan Znám, 816 31 Bratislava, Mlynská dolina. Riešenia úloh uvedených v tomto čísle pošlite na adresu vedúceho rubriky do 31. III. 1975.

B33 = Problém 7*)
B34 = Problém 8
B35 = Problém 9
B36 = Problém 10
B37 = Problém 11
B38 = Problém 12

Riešenia niektorých úloh zo štvrtého zväzku Matematických obzorov

Úloha *B15* v uverejnenom zadaní má riešenie: neexistuje také celé číslo x, aby výraz

$$\frac{u^n - x}{u - a}$$

bolo celým číslom pre všetky celé čísla u. Skutočne: pre $u = a$ uvedený zlomok nemá zmysel.

Mnohí čitatelia nás upozornili, že dostaneme zaujímavejšiu úlohu, ak sa budeme pýtať na všetky také celé čísla x, pre ktoré je hodnota uvedeného zlomku celým číslom pre všetky celé čísla $u \neq a$ (zámerom autora bola tiež táto obmena). Tu uvedieme riešenie pochádzajúce od M. Franeka:

Nech čísla x_1 aj x_2 majú žiadanú vlastnosť. Potom

$$\frac{x_2 - x_1}{u - a} = \frac{u^n - x_1}{u - a} - \frac{u^n - x_2}{u - a}$$

je celé pre všetky prirodzené čísla u, čo je možné len pre $x_1 = x_2$. Keďže $x = a^n$ je riešením, má úloha práve toto jediné riešenie.

B16. Autorovo riešenie. Podľa známej nerovnosti pre aritmetický a geometrický priemer nezáporných čísel platí:

$x^2 + 4 \geqq 4x$ (rovnosť nastane práve pri $x = 2$),

$x + 2y \geqq 2\sqrt{2xy}$ (rovnosť pri $x = 2y$).

Znásobením týchto nerovností máme

$$(x^2 + 4) \,.\, (x + 2y)^2 \geqq 4x \,.\, 8xy = 32x^2y,$$

pričom rovnosť platí práve vtedy keď $x = 2$ a súčasne $x = 2y$, teda $y = 1$.

B20. Odpoveď na uverejnenú úlohu: Tvrdenie je nesprávne. Mnohí

---

*) Problémy, ktoré dnes uverejňujeme, sú z článku M. Hejného: Metrické geometrie II, uverejneného v tomto zväzku *Matematických obzorov*, str. 31.

čitatelia si všimli okolnosť, že dostaneme správne tvrdenie, ak budeme predpokladať, že u je kladné. Tu uverejňujeme riešenie takto obmenenej úlohy M. Zajacom:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^n = b^n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{b}\right)^u = 1 \Rightarrow \left(\frac{a_i}{b}\right)^u < 1, \text{ čiže } \frac{a_i}{b} < 1$$

pre $i = 1, \ldots, n$.

Označme $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{b}\right)^v$. Potom $f'(v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{b}\right)^v \ln \frac{a_i}{b} < 0$. Teda $f(v)$ je klesajúca funkcia a odtiaľ už bezprostredne vyplýva naše tvrdenie.