ÚLOHY PRE PRÁCU MATEMATICKÝCH KRÚŽKOV

Rubriku vedie Vojtech Filo, 921 01 Piešťany, Lúčna 14; úlohy spolu s riešeniami prosíme posielať na jeho adresu.

Úloha A11 (autor P. Bartoš).

Nech α, β, γ sú vnútorné uhly trojuholníka. Dokážte, že

a) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{1}{8}$

b) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqq \frac{3}{2}$

c) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqq 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

d) $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{9}{4}$

e) $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqq \frac{3}{4}$ s podmienkou rovnosti $\alpha = \beta = \gamma$.

Dôkaz:

a) Podľa vzorcov $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$ $\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ a podľa *úlohy A10*, kde $8(s-a)(s-b)(s-c) \leqq abc \Rightarrow \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \leqq \frac{1}{8}$ platí $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}{a^2b^2c^2}} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \leqq \frac{1}{8}$ s podmienkou rovnosti $a = b = c$, teda $\alpha = \beta = \gamma$.

b) Keďže $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 1 = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ $\sin\frac{\gamma}{2} + 1$, je podľa nerovnosti a)

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqq 4\frac{1}{8} + 1 = \frac{3}{2}$ s tou istou podmienkou $\alpha = \beta = \gamma$.

c) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} =$

$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \dfrac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} \geqq 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ podľa nerovnosti a). Podmienka rovnosti $\alpha = \beta = \gamma$.

Úloha 12 (autor P. Bartoš).

Nech a, b, c sú strany a $2s$ obvod trojuholníka. Dokážte, že

1. $a(s-b)(s-c) + b(s-a)(s-c) + c(s-a)(s-b) \geqq \frac{3}{4}abc$

2. $a(s-a) + b(s-b) + c(s-c) \leqq \dfrac{9abc}{2(a+b+c)}$

3. $a(b^2+c^2-a^2) + b(a^2+c^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) \leqq 3abc$, pričom v každej nerovnosti platí rovnosť len v rovnoramennom trojuholníku.

Dôkaz:

1. Podľa vzorcov $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ atď. z nerovnosti e) v *úlohe A11* vyplýva $\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab} + \dfrac{(s-b)(s-c)}{bc} + \dfrac{(s-c)(s-a)}{ac} \geqq \frac{3}{4} \geqq$ $\geqq$ (rovnosť pri $a = b = c$), odkiaľ vyplýva nerovnosť 1.

2. Obdobne z nerovnosti d) v *úlohe A10* pomocou vzorcov $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$ atď. dostaneme $\dfrac{s(s-a)}{bc} + \dfrac{s(s-b)}{ac} + \dfrac{s(s-c)}{ab} \leqq \frac{9}{4}$ (rovnosť pri $a = b = c$), odkiaľ vyplýva nerovnosť 2.

3. Podľa kosínusovej vety $2abc\cos\alpha = a(b^2+c^2-a^2)$ a pod. Z toho dostaneme rovnosť $a(b^2+c^2-a^2) + b(c^2+a^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) =$ $= 2abc(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$ a podľa nerovnosti b) v *úlohe A11* potom dostaneme nerovnosť 3 s podmienkou rovnosti $a = b = c$.

Poznámka: Z nerovnosti 1(—3) možno vytvoriť veľa ďalších, napr.

$a(s-b)(s-c) + b(s-a)(s-c) + c(s-b)(s-a) \geqq \frac{3}{2}(s-a)(s-b)$ $(s-c)$

$a(s-a) + b(s-b) + c(s-c) \leqq \frac{1}{2}(a+b+c)(ac+bc+ac) \leqq \frac{9}{4s}(a+\quad b$ $(b+c)(c+a)$

$a(b^2+c^2+a^2) + b(c^2+a^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) \leqq \frac{1}{3}(a+b+c)(ac+$ $+bc+ab) \leqq \frac{3}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$