O INKLÚZII A ROVNOSTI MNOŽÍN

MILOŠ FRANEK, Prievidza

V článku sa budeme zaoberať množinovými identitami a formulami typu

$$f(A, B, \ldots) \subset g(A, B, \ldots)$$

ktoré vyjadrujú pravdivý vzťah pre ľubovoľné množiny A, B, ... (v identite by bolo $=$ miesto $\subset$). Pritom predpokladáme, že obe strany formuly sú výrazy utvorené „dovoleným spôsobom" z premenných A, B, ..., zo zátvoriek a zo symbolov množinových operácií $\cup$, $\cap$, — (rozdiel), $\dot{-}$ (symetrická diferencia) a $'$ (komplement v danej základnej množine Z). Tieto výrazy možno induktívne definovať, ale nebudeme to robiť. Pripomeňme len definície

$$A - B = \{x \in Z; (x \in A) \wedge (x \notin B)\},$$

$$A \dot{-} B = \{x \in Z; [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \vee [(x \notin A) \wedge (x \in B)]\} =$$

$$= (A - B) \cup (B - A)$$

t. j. symetrická diferencia $A \dot{-} B$ sa skladá z prvkov patriacich do práve jednej z množín A, B.

Pri zisťovaní, či vzťah práve uvedeného typu platí pre ľubovoľné množiny A, B, ... a v ľubovoľnej základnej množine Z, sa postupuje buď „od prípadu k prípadu", alebo pomocou Vennových diagramov. Druhá metóda je dosť univerzálna — v zložitejších prípadoch — a najmä pri väčšom počte premenných — je však tvorenie diagramov a čítanie z nich dosť neprehľadné. Na dvoch príkladoch si osvetlíme postup, ktorý je v podstate prepisom riešenia Vennovým diagramom do tabuľky núl a jednotiek.

Príklad 1. Zistite, či

$$(C \cup B) - (A \cap C) = (C - A) \cup (B - C)$$

je množinová identita.

Riešenie. Aj keby sa v tomto konkrétnom prípade dalo postupovať jednoduchšie, zvolíme postup, z ktorého dospejeme k spomínanej tabuľkovej metóde.

Pravdivostnú hodnotu výroku p označíme $|p|$, pričom 1 znamen
„pravdu“ a 0 „nepravdu“. Predpokladajme napr., že

$$|x \in A| = 0 \qquad (1$$

$$|x \in B| = 1 \qquad (2$$

$$|x \in C| = 1 \qquad (3$$

Potom podľa definície operácií $\cup$, $\cap$, — a relácie = platí

$$|x \in C \cup B| = 1 \qquad \text{[podľa (3), (2)]} \qquad (4$$

$$|x \in A \cap C| = 0 \qquad \text{[podľa (1), (3)]} \qquad (5$$

$$|x \in (C \cup B) - (A \cap C)| = 1 \qquad \text{[podľa (4), (5)]} \qquad (6$$

$$|x \in C - A| = 1 \qquad \text{[podľa (3), (1)]} \qquad (7$$

$$|x \in B - C| = 0 \qquad \text{[podľa (2), (3)]} \qquad (8$$

$$|x \in (C - A) \cup (B - C)| = 1 \qquad \text{[podľa (7), (8)]} \qquad (9$$

$$|x \in (C \cup B) - (A \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (C - A) \cup (B - C)| = 1 \qquad \text{[podľa (6), (9)]} \qquad (10$$

Podobne postupujeme pri ostatných možnostiach pre pravdivostné hod
noty $|x \in A|$, $|x \in B|$, $|x \in C|$. Všetkých 8 prípadov skrátene vyjadrím
v *tab. 1*, v ktorej je predošlý prípad zachytený v štvrtom riadku pod zá

Tabuľka

1	2	3	4	6	5	10	7	9	8
A	B	C	$(C \cup B)$	—	$(A \cap C)$	=	$(C - A)$	$\cup$	$(B - C)$
			3	4	1	6	3	7	2
			2	5	3	9	1	8	3
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	0	0	0

hlavím. V záhlaví sú hore poradové čísla stĺpcov (v tomto poradí ich píšeme a nižšie poradové čísla stĺpcov, z ktorých príslušný slpec tvoríme (porovnaj s vyššie uvedenými označeniami (1) až (10)).

Podľa *tab. 1* pre každé x platí

$$x \in (C \cup B) - (A \cap C) \Leftrightarrow x \in (C - A) \cup (B - C),$$

čiže rovnosť

$$(C \cup B) - (A \cap C) = (C - A) \cup (B - C)$$

je množinová identita (t. j. platí pre ľubovoľné množiny A, B, C).

Prv než uvedieme text nasledujúceho príkladu, sformulujme mechanické pravidlá, podľa ktorých tvoríme jednotlivé stĺpce.

a) Ak v úlohe, ktorú riešime, vystupuje n premenných $A_1, A_2, \ldots, A_n$, bude pod záhlavím 2^n riadkov (32 v príkl. 2); „stĺpec A_1" sa pritom skladá z 2^{n-1} núl a 2^{n-1} jednotiek, „stĺpec A_2" z 2^{n-2} núl, 2^{n-2} jednotiek atď.; konečne v „stĺpci A_n" sú striedavo nuly a jednotky.

b) Stĺpce pre $\cup$, $\cap$, $'$, $\subset$, $=$ sa tvoria rovnako ako stĺpce pre $\vee$, $\wedge$, $'$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ (v tomto poradí) pri výrokových formulách. Ďalej si uvedomíme, že

$$| x \in A \Rightarrow x \in B | = 1 \text{ práve keď } | x \in A | \leqq | x \in B |$$

$$| x \in A \Leftrightarrow x \in B | = 1 \text{ práve keď } | x \in A | = | x \in B |$$

c) V stĺpci pre rozdiel $A - B$ je jednotka práve vtedy, keď je 1 v stĺpci A a 0 v stĺpci B (t. j. inokedy je v stĺpci $A - B$ nula).

d) V stĺpci $A \dot{-} B$ je 1 práve vtedy, keď sú v stĺpcoch A, B rozličné hodnoty.

Príklad 2. Zistite, či za predpokladu

$$(A \cup B)' \dot{-} C \subset A' \cap D = E - B \tag{11}$$

možno niektoré dva z výrazov $(A \dot{-} D) \cap C$, $(B - C) \cup A \cup E$, $E \dot{-} A$ spojiť znamienkom rovnosti alebo inklúzie tak, že vznikne formula, ktorá dáva pravdivý výrok pri ľubovoľnej základnej množine a pri dosadení ľubovoľných množín za A, B, C, D, E.

Riešenie. Na danú otázku možno odpovedať na základe *tab. 2.* V nej sú vynechané pokračovania riadkov zodpovedajúcich tým kombináciám pravdivostných hodnôt $| x \in A |, \ldots, | x \in E |$, pri ktorých nie je predpoklad (11) splnený (do konca pokračujeme teda len v riadkoch, ktoré majú jednotky v stĺpcoch č. 11 a 13).

Keďže pre pravdivostné hodnoty h_{15}, h_{18}, h_{19} v 15., 18. a 19. stĺpci a v hociktorom riadku platí

$$h_{15} \leqq h_{19} \leqq h_{18}$$

platí aj

$$(A \dot{-} D) \cap C \subset E \dot{-} A \subset (B - C) \cup A \cup E$$

0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0						
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0						
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1						
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1						
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0								
1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0								
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0								
1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0								
1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0								
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0								
1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0								
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0								

Tabulka 2

1	2	3	4	5	6	7	8	11	9	10	13	12	14	15	16	17	18	19
A	B	C	D	E	$(A \cup B)$	$'$	$\dot{-}\ C$	$\subset$	A'	$\cap\ D$	$=$	$E - B$	$(A \dot{-} D)$	$\cap\ C$	$(B - C)$	$\cup\ A$	$\cup\ E$	$E \dot{-} A$
					1	6	7	8	1	9	10	5	1	14	2	16	17	5
					2		3	10		4	12	2	4	3	3	1	5	1
0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0								
0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0								
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0						
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1						
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0						
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0						
0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0						
0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0								
0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0								

v ľubovoľnej základnej množine Z a pre ľubovoľné množiny A, B, C, D, $E \subset Z$ splňujúce podmienku (11). Fakt, že žiadnu z oboch inklúzií nemožno všeobecne nahradiť rovnosťou, vyplýva z existencie riadku, v ktorom $h_{15} = 0$; $h_{19} = 1$, ako aj riadku, v ktorom $h_{19} = 0$; $h_{18} = 1$. V tejto súvislosti ešte ukážme, ako sa dá na základe *tab. 2* ľahko nájsť príslušný kontrapríklad. Vyberme napr. 7. riadok zdola, v ktorom $h_{19} = 0$; $h_{18} = 1$. Keďže v stĺpcoch A, B, C, D, E sú tu hodnoty 1, 1, 0, 0, 1, stačí zvoliť také množiny A, B, C, D, E, aby existoval prvok x, pre ktorý platí

$$|x \in A| = 1, \quad |x \in B| = 1, \quad |x \in C| = 0,$$

$$|x \in D| = 0, \quad |x \in E| = 1$$

Položme napr.

$$A = B = E = \{2\}, \qquad C = D = \emptyset \qquad (\text{t. j. } x = 2)$$

Potom

$$E \dot{-} A = \emptyset \neq \{2\} = (B - C) \cup A \cup E$$

Na základe oboch príkladov pozorný čitateľ iste dokáže vyriešiť hocijakú podobnú úlohu a má predstavu o znení a dôkaze vety, v ktorej sa tvrdí, že v popísaných prípadoch dostaneme uvedeným spôsobom vždy správny výsledok. My ju nebudeme uvádzať pre zdĺhavú formuláciu a nutnosť akýchsi prípravných úvah (ide napr. o odlišovanie formuly od vzťahu, ktorý vyjadruje v danej množinovej štruktúre a iné).

Na záver uveďme ešte tieto poznámky:

a) Jednotiace hľadisko pre narábanie s výrokovými formulami a formulami, ktoré sme spomínali v tomto článku, dáva tzv. Boolova algebra. Jej modelmi sú napr. systém všetkých podmnožín danej množiny Z s operáciami $\cup$, $\cap$, $'$ (komplement), ako aj určité množiny tried výrokových formúl s operáciami $\vee$, $\wedge$, $'$ (negácia).

b) Ak do výrokovej formuly $\mathscr{F}$ namiesto výrokových premenných dosadíme „množinové" rovnosti alebo inklúzie, dostaneme akúsi formulu $\mathscr{F}^*$, ktorá je zápisom všeobecnejšieho vzťahu (vystupujú v nej symboly $=$, $\subset$ a množinové i výrokové operátory $\cup$, $\cap$, $'$, $-$, $\dot{-}$, $\vee$, $\wedge$, $'$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$). Existuje univerzálna tabuľková metóda na overovanie „tautologičnosti" takejto formuly; jej popis však presahuje rámec tohto článku.